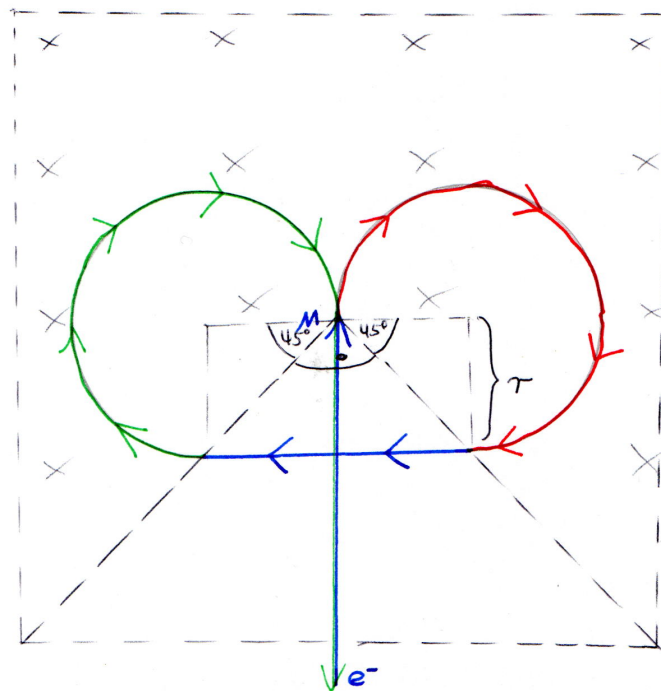


# Physik

**Mechanik - Elektrizitätslehre - Magnetische Felder**  
**Wellenoptik - Quantenphysik**  
**Atome - Hülle und Kern**  
**Relativitätstheorie**

29. April 2008



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Mechanik</b>	<b>5</b>
1.1	Kinematik - Spezialfälle der Bewegung . . . . .	5
1.2	Dynamik . . . . .	5
1.3	Erhaltungssätze . . . . .	6
1.4	Drehbewegungen - Drehimpuls . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Elektrizitätslehre</b>	<b>8</b>
2.1	Definitionen . . . . .	8
2.2	Messen der Feldstärke $E$ . . . . .	9
2.3	Homogenes Feld im Plattenkondensator . . . . .	9
2.4	Laden eines Plattenkondensators . . . . .	10
2.5	Elektronenablenkröhre . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Magnetische Felder</b>	<b>14</b>
3.1	Definitionen . . . . .	14
3.2	Leiterschaukelversuch . . . . .	14
3.3	Zusammenhänge . . . . .	15
3.4	LORENTZkraft auf Elektronen . . . . .	16
3.5	Kreisbewegung von Elektronen in einem Magnetfeld . . . . .	16
3.6	Einheitenumrechnung . . . . .	17
3.7	Übungsaufgaben zu Magnetfeldern . . . . .	17
3.8	HALL-Effekt . . . . .	17
3.9	Induktionsvorgänge . . . . .	19
3.10	Spule im Gleichstromkreis . . . . .	21
3.11	Lade- und Entladevorgang eines Kondensators im Gleichstromkreis . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Wellenoptik</b>	<b>26</b>
4.1	Reflexion und Interferenz von Wellen . . . . .	26
4.2	Stehende Welle . . . . .	35
<b>5</b>	<b>Quantenphysik</b>	<b>36</b>
5.1	Lichtelektrischer Effekt oder Photoeffekt . . . . .	36
5.2	COMPTON-Effekt . . . . .	41
5.3	Aufgaben . . . . .	46
5.4	Welleneigenschaften von Elektronen . . . . .	47
5.5	HEISENBERG'sche Unschärferelation . . . . .	49

<b>6</b>	<b>Atome - Hülle und Kern</b>	<b>51</b>
6.1	Emissionsspektrum . . . . .	51
6.2	FRANCK-HERTZ-Versuch . . . . .	53
6.3	Entwicklung des heutigen Atommodells . . . . .	54
6.4	Verträglichkeit mit Wellenmodell . . . . .	61
6.5	Quantenmechanisches Atommodell . . . . .	62
6.6	Lumineszenz . . . . .	63
6.7	Radioaktivität . . . . .	63
6.8	Künstliche Kernumwandlungen . . . . .	69
<b>7</b>	<b>Relativitätstheorie</b>	<b>71</b>
7.1	Spezielle Relativitätstheorie . . . . .	71
7.2	Michelson-Morley-Experiment . . . . .	71
7.3	EINSTEINS Postulate . . . . .	72

# 1 Mechanik

## 1.1 Kinematik - Spezialfälle der Bewegung

Bewegungsgleichungen	Weg-Zeit	$s(t)$
	Geschwindigkeit-Zeit	$v(t) = \dot{s}(t)$
	Beschleunigung-Zeit	$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t)$

$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$  ist die Intervall- oder Durchschnittsgeschwindigkeit.

Die Momentangeschwindigkeit ist  $v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \dot{s}(t)$ .

Die Momentanbeschleunigung ist  $a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t)$ .

### 1.1.1 Geradlinige gleichförmige Bewegung

$v(t) = \text{const.} = v_0$  mit  $s = v_0 \cdot t$ ,  $a(t) = 0$ .

### 1.1.2 Geradlinige beschleunigte Bewegung

$$(1.1) \quad s(t) = \frac{a_0 t^2}{2}$$

$$(1.2) \quad v(t) = a_0 \cdot t + v_0$$

$$(1.3) \quad a(t) = \text{const.} = a_0$$

### 1.1.3 Freier Fall

$a = g$ .

### 1.1.4 Wurfbewegung

Für eine Wurfbewegung gilt das Unabhängigkeitsprinzip.

### 1.1.5 Kreisbewegung

## 1.2 Dynamik

Galilei GALILEI (1564-1642), Einführung des Experiments Isaac NEWTON (1643-1727).

1. Axiom: Trägheitsprinzip
2. Axiom: actio=reactio
3. Axiom: Grundgesetz der Mechanik  $F=m \cdot a$

Es gilt  $\rightarrow F = \dot{\vec{p}}$  mit  $p = m \cdot v$ .

## 1.3 Erhaltungssätze

In einem abgeschlossenen System gelten der Energie- und der Impulserhaltungssatz.

## 1.4 Drehbewegungen - Drehimpuls

### 1.4.1 Kräfte bei der Kreisbewegung

Bei einer Translation ist  $\vec{p} = m\vec{v}$ . Eine gleichmäßige Rotation zeichnet sich dadurch aus, dass sich die Richtung des Geschwindigkeitsvektors ändert, der Betrag aber konstant ist. Die Masse wird durch eine Zentralkraft  $Z = \frac{mv^2}{r}$  auf der Kreisbahn gehalten.

### 1.4.2 Winkelgeschwindigkeit

Die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  ist die Ableitung des Winkels  $\varphi$  (in Bogenmaß), sodass

$$\omega = \dot{\varphi} = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f.$$

Die Geschwindigkeit  $v$  eines Punktes der Kreisbahn mit Radius  $r$  ist dann  $v = \frac{2\pi r}{T} = \omega r$ .

### 1.4.3 Energie bei geradliniger Bewegung

Es wird angenommen, dass ein Körper aus einzelnen Massen  $m_1, m_2, \dots, m_n$  besteht. Dann ist die gesamte kinetische Energie des Körpers

$$(1.4) \quad W_{\text{kin}} = \frac{1}{2}v^2(m_1 + m_2 + \dots + m_n) = \frac{1}{2}v^2 \sum_{i=1}^n m_i$$

### 1.4.4 Energie bei Rotation

(1.5)

$$W_{\text{rot}} = \frac{1}{2}(m_1v_1^2 + m_2v_2^2 + \dots + m_nv_n^2) = \frac{1}{2}(m_1r_1^2\omega^2 + \dots + m_nr_n^2\omega^2) = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = \frac{1}{2}\omega^2 J$$

### 1.4.5 Trägheitsmoment

Das Trägheitsmoment  $J$  ist

$$(1.6) \quad J = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = \int r^2 dm$$

Es nimmt in der Rotation den Platz ein, den die Masse in der Translation hat.

### 1.4.6 Übersicht

Rotation	Translation
$J = mr^2$	$m$
$\omega = \frac{v}{r}$	$v = r\omega$
$F_Z = \frac{mv^2}{r} = mr\omega^2$	$F = m \cdot a$
$W_{\text{rot}} = \frac{1}{2}J\omega^2$	$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$
$L = J\omega = mr^2\frac{v}{r} = mrv$	$p = mv$

Tabelle 1.1: Übersicht der Bewegungsvorgänge

$$[mrv] = 1\text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}} = 1\text{Nms} = 1\text{Js} = [h].$$

# 2 Elektrizitätslehre

## 2.1 Definitionen

### 2.1.1 Elektrisches Feld

Ein elektrisches Feld ist ein Raum, in dem Kräfte auf Ladungen ausgeübt werden.

### 2.1.2 Feldlinien

Michael FARADAY (1791-1867):

Feldlinien sind Bahnen, auf denen sich eine positive Ladung bewegt.

### 2.1.3 Spannung

Die Spannung gibt an, wie stark die Elektronen angetrieben werden. Bei gleicher Antriebsleistung hängt der Antrieb jedes einzelnen Elektrons nur davon ab, wie viele Elektronen angetrieben werden. Damit man also den Antrieb auf die gleiche Zahl Elektronen beziehen kann, ist es sinnvoll, die Leistung  $P$  durch die Stromstärke  $I$  zu dividieren:

$$U = \frac{P}{I} = \frac{W}{Q_0}.$$

### 2.1.4 Elektrische Feldstärke

Der Quotient  $\frac{F_{el}}{Q_0}$  beschreibt die Stärke des elektrischen Feldes, da die Größe  $\frac{F_{el}}{Q_0}$  unabhängig von der Größe der Probeladung  $Q_0$  ist:  $E = \frac{F_{el}}{Q_0}$ ,  $[E] = 1 \frac{N}{C}$ .

### 2.1.5 Homogenes Feld

In einem homogenen Feld herrscht überall die gleiche Feldstärke  $E$ .

### 2.1.6 Flächenladungsdichte

Die Flächenladungsdichte  $\sigma$  (elektrische Flussdichte  $D$ ) ist der Quotient aus der Ladung  $Q$  und der von ihr belegten Fläche  $A$ :  $\sigma = \frac{Q}{A}$ ,  $[\sigma] = 1 \frac{C}{m^2}$ ,  $\sigma = \epsilon_0 \cdot E$ .

### 2.1.7 Kapazität

$C = \frac{Q}{U} = \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d}$  (gilt nur im homogenen Feld),  $[C] = 1F$ .

Das Produkt  $Q \cdot d$  ist konstant, je größer der Abstand, umso weniger Ladung fließt auf

den Kondensator:  $Q \sim \frac{1}{d}$ .

$C'$  ist die Kapazität eines Kondensators mit einem Dielektrikum (Dielektrizitätszahl  $\epsilon_r$ ):  
 $\frac{C'}{C} = \epsilon_r$ .

## 2.1.8 Kirchhoffsche Gesetze

### 2.1.8.1 Knotenregel

An jedem Knoten einer Schaltung ist die Summe aller Ströme null.

### 2.1.8.2 Maschenregel

Die Summe aller in einer Richtung gemessenen Spannungen in einer Masche ist null.

## 2.2 Messen der Feldstärke $E$

**Versuch:** In das Feld zweier geladener Kondensatorplatten werden zwei Tischtennisbälle mit einer Graphitoberfläche geführt.

Im ersten Teil des Versuches wird ein Tischtennisball geladen, woraufhin ihn die elektrische Kraft  $F_{el}$  auslenkt. Die Auslenkung wird im Schattenbild gemessen.

Im zweiten Teil wird der im Feld befindliche Tischtennisball mit einem zweiten ungeladenen Ball berührt. Dadurch halbiert sich die Ladung so wie auch die Auslenkung und damit  $F_{el}$ .

Das heißt  $F \sim Q$  und  $E = \frac{F}{Q} = \text{const.}$

## 2.3 Homogenes Feld im Plattenkondensator

### 2.3.1 Homogenes Feld

Eine positive Ladung soll von der negativen Platte zur Positiven gegen die Kraft  $F_{el}$  bewegt werden. Dabei wird Arbeit gegen das Feld verrichtet:

$W = F_{el} \cdot d$ . Die Arbeit ist zur Ladungsgröße  $Q$  proportional:  $U = \frac{W}{Q} = \frac{F_{el} \cdot d}{Q} = E \cdot d$ .

### 2.3.2 Flächenladungsdichte

Auf einer leitenden Oberfläche verteilen sich Ladungen gleichmäßig:

Flächenladungsdichte:  $\sigma = \frac{Q}{A}$ .

### 2.3.3 Messen der Kapazität

Der Kondensator wird, ohne die Geometrie zu verändern, mit der Spannung  $U$  geladen:  $C = \frac{Q}{U} = \text{const.}$ ,  $[C] = 1 \frac{C}{V} = 1F$ . Anschließend wird die Stromquelle vom Stromkreis entfernt und die Ladung  $Q$  des Kondensators mit einem Messverstärker gemessen.

Da  $\sigma \sim E$  ist auch  $\frac{Q}{A} \sim \frac{U}{d}$ .

Es gilt  $\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{C \cdot U}{A} = \frac{C \cdot E \cdot d}{A}$ . Da  $\sigma = \varepsilon_0 \cdot E$ , ist  $C = \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{d}$ .

### 2.3.4 Dielektrikum

Wird ein Dielektrikum in ein elektrisches Feld gehalten, so sinkt die Spannung  $U$ , da die Feldstärke sinkt. Durch Polarisation entstehen Oberflächenladungen und die Zahl der im Isolator verlaufenden Feldlinien sinkt. Nach  $E = \frac{U}{d}$  sinkt damit auch  $U$ .

Da  $Q$  gleich bleibt, muss  $C = \frac{Q}{U}$  größer werden. Ein Kondensator mit einem Dielektrikum hat eine größere Kapazität.

$$C = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{d}.$$

Die Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon_0$  im Vakuum ist  $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$ .

Ist das Dielektrikum ein Leiter, so spricht man von Influenz, ist es ein Isolator, so kommt es zur Polarisation der Ladungen.

#### 2.3.4.1 Influenz

Die frei beweglichen Elektronen werden vom Atom getrennt. Alle Feldlinien des äußeren Feldes enden oder beginnen auf der Oberfläche.

Das Innere des Leiters ist damit frei vom äußeren Feld (vgl. FARADAY-Käfig).

#### 2.3.4.2 Polarisation

Die Ladungen in den Molekülen werden verschoben. Es entstehen Ladungen an der Oberfläche, an denen Feldlinien enden oder beginnen. Es bleiben jedoch Feldlinien des äußeren Feldes übrig, da sich die Elektronen nicht bewegen können.

## 2.4 Laden eines Plattenkondensators

### 2.4.1 Energie eines Kondensators

Um die Elektronen von der positiven zur negativen Platte zu bewegen ist Energie aus der Spannungsquelle nötig.

In einem Modell geht man davon aus, dass kleine Ladungsportionen  $\Delta Q$  von Platte zu Platte gebracht werden. Dazu ist jeweils eine Spannung  $U$  und damit eine Arbeit  $W$  notwendig, es gilt  $W = \Delta Q \cdot U$ :

1.  $U=0 \Rightarrow W = 0 \cdot \Delta Q = 0$
2.  $U = U_1 \Rightarrow W_1 = U_1 \cdot \Delta Q$
3.  $U = 2U_1 \Rightarrow W_2 = U_2 \cdot \Delta Q$

Der Betrag des Flächeninhalts jedes einzelnen Rechtecks entspricht der Arbeit, die an der Ladungsportion  $\Delta Q$  verrichtet werden muss, um sie gegen die aktuelle Spannung zu bewegen.

Gesamte Arbeit:  $W = \sum_{i=1}^n U_i \cdot \Delta Q$ .

Die Flächeninhalte werden umso genauer gemessen, wenn  $\Delta Q \rightarrow 0$ . Dann stellt die Treppenfigur ein Dreieck dar und dann ist  $W = \frac{1}{2}Q \cdot U = \frac{1}{2}CU^2$ .

Die Energie, die in einem auf die Spannung  $U$  geladenen Kondensator der Kapazität  $C$  gespeichert ist, ist  $W = \frac{1}{2}CU^2$  oder genauer  $W = \int_{U_1}^{U_2} C \cdot U \, dU$ .

**Beispiel:** Bei  $U = 1000\text{V}$  in Luft ( $\epsilon_r = 1$ ) mit  $A = 0,08\text{m}^2$  und  $d = 0,002\text{m}$  wird ein Kondensator aufgeladen. Dann ist  $W = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_r \cdot$

$$\epsilon_0 \cdot \frac{A}{d} \cdot U^2 = 1,77 \cdot 10^{-4}\text{J}.$$

Kondensatoren speichern (relativ) wenig Energie, aber diese ist im Vergleich zu Kohle sofort abrufbar.

### 2.4.2 Wo steckt die Energie eines Kondensators?

Eine Rechnung gibt einen Hinweis auf die Antwort:

$$(2.1) \quad W = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \underbrace{A \cdot d}_{\text{Volumen des Feldes}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot E^2 \cdot V$$

Die Energie ist im Feld gespeichert.

## 2.5 Elektronenablenkröhre

Auch als Braunsche Röhre bekannt. Grundlage für die Apparatur ist der EDISON-RICHARDSON-Effekt (Glühelektrischer Effekt).

### 2.5.1 Edison-Effekt

Elektronen in einem glühenden Leiter werden so schnell, dass sie die Oberfläche durchstoßen. Im Draht bleiben positiv geladene Ionen übrig, die die ausgedampften Elektronen wieder anziehen. Es stellt sich ein Gleichgewicht ein zwischen Elektronen, die den Draht verlassen, und solchen, die wieder eintreten. Insgesamt bildet sich um den Glühdraht eine Elektronenwolke.

### 2.5.2 Versuchsaufbau

Der Aufbau ist in Abbildung ?? skizziert.

Der Zylinder, der mit K bezeichnet wird, ist negativ geladen und sorgt für eine Bündelung der Elektronen. A ist die Anode, wobei  $U_a$  ca. 2kV groß ist. Sie sorgt für die Beschleunigung der Elektronen.

Die beschleunigten Elektronen treten in ein horizontal und in ein vertikal verlaufendes elektrisches Feld und erzeugen auf einem Schirm Lichtpunkte beim Auftreffen.

### 2.5.3 Ablenkung eines Elektronenstrahls im elektrischen Feld

#### 2.5.3.1 Parabel: Unabhängige Bewegungen

Im Oszilloskop 2.5.3.3 wird ein Elektronenstrahl abgelenkt. Zur Messung der Spannung muss die gemessene Strecke  $y_1$  zur gemessenen Spannung  $U$  proportional sein.

Die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  ergibt sich aus der angelegten Spannung  $U_a$  des elektrischen Feldes und der Ladung der Elektronen, die Energie des elektrischen Feldes und die kinetische Energie sind gleich:  $e \cdot U_a = \frac{m_e}{2} v_0^2 \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2eU_a}{m_e}}$ .

Die Bewegungen der Elektronen in x- und y-Richtung im Feld verlaufen unabhängig voneinander. In x-Richtung findet eine gleichförmige Bewegung mit  $x = v_0 t$  statt. In y-Richtung liegt eine beschleunigte Bewegung mit  $y = \frac{1}{2} a t^2$  vor. Der Beschleunigung liegt eine Kraft  $F_{el}$  auf die Elektronen zugrunde:  $F_{el} = e \cdot E = e \frac{U}{d} = m_e \cdot a$ .

Dann ist die Beschleunigung  $a = \frac{e \cdot U}{m_e \cdot d}$  und  $y = \frac{e \cdot U}{2m_e \cdot d} t^2$ . Es ist

$$(2.2) \quad y(x) = \frac{e \cdot U}{2m_e \cdot d} \frac{x^2}{v_0^2}$$

Demnach ist  $y(x) \sim U$ .

#### 2.5.3.2 Gerade: Gleichförmige Bewegung

$y(x)$  ist die Bahnkurve im Kondensator, die Elektronen bewegen sich danach auf einer Geraden derselben Steigung des Graphen  $y(x)$  in dem Punkt  $P(s|y(s))$ , also  $y'(s)$ , weiter. Die Grundgleichung ist  $y = mx + k$  mit  $m = y'(s) = \frac{e \cdot U}{m d v_0^2} \cdot s$ . Der y-Achsenabschnitt  $k$  wird dann durch Einsetzen des Punktes  $P$  ermittelt

$$(2.3) \quad y(s) = \frac{eU}{m d v_0^2} s \cdot s + k$$

$$(2.4) \quad \frac{eU}{2m d v_0^2} s^2 = \frac{eU}{m d v_0^2} s^2 + k$$

$$(2.5) \quad -\frac{1}{2} \frac{eU}{m d v_0^2} \cdot s^2 = k$$

$k$  (2.5) ist negativ, da die Achse nach unten verläuft. Die Geradengleichung im Punkt  $P$  ist dann

$$(2.6) \quad y(x) = \frac{eUs}{mdv_0^2} \cdot x - \frac{1}{2} \frac{eU}{mdv_0^2} \cdot s^2$$

Dann ist der y-Wert  $y_1 = y(s + b)$  am Schirm durch die Gerade gegeben:

$$(2.7) \quad y_1 = y(s + b) = U \left( \frac{e \cdot s(s + b)}{mdv_0^2} - \frac{es^2}{2mdv_0^2} \right)$$

In (2.7) sind nur Naturkonstanten oder feste Geräteabmessungen vorhanden, demnach ist  $y_1 \sim U$ .

### 2.5.3.3 Oszilloskop

Für ein Oszilloskop gilt

$$(2.8) \quad y_1 = \underbrace{\frac{e \cdot s \left(b + \frac{s}{2}\right)}{mdv_0^2}}_{\text{Konstante Größen}} \cdot U$$

$$(2.9) \quad y_1 \sim U$$

Das Oszilloskop ist damit ein trägheitsloses Spannungsmessgerät. Die Einheit  $\frac{\text{V}}{\text{div.}}$  bzw.  $\frac{\text{ms}}{\text{div.}}$  gibt an, wie viel Volt bzw. Millisekunden einem Abschnitt (division) entsprechend.

# 3 Magnetische Felder

## 3.1 Definitionen

### 3.1.1 Permanentmagneten

Magnetische Feldlinien sind Bahnen, auf denen sich ein einzelner Nordpol im Magnetfeld bewegen würde. In einem magnetisierbaren Stoff sind Weißsche Bezirke vorhanden, die sich bei Magnetisierung entsprechend ausrichten.

### 3.1.2 Elektromagnete

Die magnetischen Feldlinien eines Stromes sind konzentrische Kreise, die Richtung wird durch die 1. Linke-Hand-Regel bestimmt: Der Daumen zeigt in Elektronenfluss-, die gekrümmten Finger dann in Feldlinienrichtung (Richtung des Magnetfeldes).

### 3.1.3 Feld einer Spule

Das Feld in einer Spule ist so aufgebaut, dass das Feld im Inneren annähernd homogen ist. Um die Leiter entstehen magnetische Felder, die sich überlagern.

### 3.1.4 Überlagerung von Feldern

Im Inneren der Spule zeigen demnach die Feldlinien vom Südpol zum Nordpol und das Feld ist homogen. Die Feldlinien der nebeneinander liegenden Leitern löschen sich aus.

## 3.2 Leiterschaukelversuch

### 3.2.1 Versuchsaufbau

Eine stromdurchflossene Leiterschaukel wird in das homogene Feld eines Magneten gehängt. Sie wird daraufhin ausgelenkt.

### 3.2.2 Lorentzkraft

Auf bewegte Elektronen wirkt in einem Magnetfeld die sogenannte Lorentzkraft  $\vec{F}_L$ , deren Richtung sich aus der UVW-Regel der linken Hand ergibt. Der Betrag der Lorentzkraft hängt ab von

1. der Stärke  $B$  des Magnetfeldes
2. der Stromstärke  $I$  im Leiter (Prüfstrom)
3. der Leiterlänge  $s$ , auf die das Feld wirkt

### 3.3 Zusammenhänge

In einem Versuch wird in eine Spule mit  $I_{\text{err}}$  eine Prüfspule mit dem Prüfstrom  $I_P$  gehalten. Auf sie wirkt die Lorentzkraft  $F_L$ , die gemessen wird. Für die langgestreckte Spule ist  $I_{\text{err}} = 1,3\text{A}$ . Sie hat zu Anfang eine Windungszahl von  $n_1 = 50$ .

#### 3.3.1 Abhängigkeit der Lorentzkraft vom Prüfstrom

Der Prüfstrom  $I_P$  wird verändert und daraufhin die Lorentzkraft gemessen. Der Quotient  $\frac{F_L}{I_P}$  ist konstant, sodass  $F_L \sim I_P$  ist.

#### 3.3.2 Abhängigkeit der Lorentzkraft von der Leiterlänge

Die Stromstärke wird wie in 3.3.1 verändert und erneut wird die Lorentzkraft gemessen. Dieses Mal hat die Prüfspule eine Windungszahl von  $n_2 = 100$ . Im Vergleich zu den Ergebnissen in 3.3.1 ist die Lorentzkraft mit  $n_2$  etwa doppelt so groß bei gleicher Prüfstromstärke. Also ist  $F_L \sim s$ .

#### 3.3.3 Definition

Zwei Proportionalitäten können zusammengefasst werden:  $F_L \sim I_P \wedge F_L \sim s \Leftrightarrow F_L \sim I_P \cdot s$ . Bleibt  $I_{\text{err}}$  konstant, so ist auch  $\frac{F_L}{I_P \cdot s} = \text{const.}$

Ein Leiter der Länge  $s$ , der senkrecht zu den Feldlinien eines Magnetfeldes steht und vom Strom  $I$  durchflossen wird, erfährt die Kraft  $F$ . Der Quotient  $\frac{F}{I \cdot s} = B$  heißt magnetische Flussdichte Flussdichte des Feldes.

$\vec{B}$  ist ein Vektor in Richtung der magnetischen Feldlinien, also nicht in Kraftrichtung,  $[B] = 1 \frac{\text{N}}{\text{Am}} = 1\text{T}$  (Nicola TESLA).

Wenn  $I$  nicht senkrecht zu den Magnetfeldlinien fließt, muss dieser Winkel  $\varphi$  zwischen Magnetfeldlinien und Leiter mit einbezogen werden. Dazu wird  $\vec{B}$  in zwei Komponenten, in eine zu  $I$  senkrechte ( $\vec{B}_\perp$ ) und in eine zu  $I$  parallele ( $\vec{B}_\parallel$ ) zerlegt. Dann ist  $\sin \varphi = \frac{B_\perp}{B}$ . Bewegt sich ein Elektronenpaar parallel zu den magnetischen Feldlinien, so wirkt keine Kraft auf das Elektron. Nur die senkrechte Komponente von  $\vec{B}$  ist entscheidend:

$$(3.1) \quad F = B_\perp \cdot I \cdot s = B \cdot I \cdot s \cdot \sin \varphi$$

## 3.4 Lorentzkraft auf Elektronen

### 3.4.1 Kraft auf $N$ Elektronen

In dem Leiterstück der Länge  $s$  befinden sich  $N$  Elektronen, die sich alle mit der Geschwindigkeit  $v_e$  bewegen und in der Zeit  $t$  durch den Leiterquerschnitt  $A$  treten (Annahmen zur Vereinfachung der Rechenvorgänge).

Dann lässt sich die Lorentzkraft auch auf ein einzelnes Elektron beziehen.

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{Q}{t} = \frac{N \cdot e}{t} \\
 v_e = \frac{s}{t} &\Leftrightarrow t = \frac{s}{v_e} \Rightarrow I = \frac{N \cdot e \cdot v_e}{s} \\
 (3.2) \quad F &= B \cdot I \cdot s = B \cdot N \cdot e \cdot v_e
 \end{aligned}$$

### 3.4.2 Kraft auf ein Elektron

(3.2) ist die Kraft auf den Leiter, damit ist  $F = Bv_e e$  die Kraft auf ein bewegtes Elektron in einem Magnetfeld ( $\vec{F}_L = e \cdot \vec{v}_e \times \vec{B}$ ).

Bewegt sich ein Elektron mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}_e$  senkrecht zu den Feldlinien eines Magnetfeldes mit der Flussdichte  $\vec{B}$ , so erfährt es die Lorentzkraft  $\vec{F}_L$  vom Betrag  $|\vec{F}_L| = e \cdot v \cdot B$ . Die Lorentzkraft steht senkrecht auf  $\vec{v}$  und  $\vec{B}$ , sie ändert nur die Richtung der Elektronengeschwindigkeit, nicht den Betrag der Geschwindigkeit.

$F_L$  ist null, wenn das Elektron ruht ( $v_e = 0$ ) oder sich parallel zum Magnetfeld bewegt.

## 3.5 Kreisbewegung von Elektronen in einem Magnetfeld

Zwischen HELMHOLTZ-Spulen entsteht ein homogenes Magnetfeld. Ein Elektronenstrahl tritt senkrecht zu den Magnetfeldlinien in das Feld ein.

Im Feld der Helmholtz-Spulen wird der Elektronenstrahl so abgelenkt, dass er einen Kreis bildet. Die Lorentzkraft lenkt das Elektron zum Mittelpunkt eines Kreises ab, wobei sich der Geschwindigkeitsbetrag nicht ändert. Die Lorentzkraft wirkt als Zentripetalkraft  $F = m \frac{v^2}{r}$ .

$$(3.3) \quad ev_e B = m_e \frac{v_e^2}{r}$$

$$(3.4) \quad eU = \frac{m_e}{2} v_e^2 \Leftrightarrow v_e = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}$$

$$(3.5) \quad e \cdot B = \frac{m_e}{r} \cdot \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}$$

$$\frac{e}{m_e} = \frac{2U}{r^2 B^2}$$

Nach (3.3) (Zentripetalkraft und Lorentzkraft sind gleich) und (3.4) (an einer Ladung verrichtete Arbeit und kinetische Energie sind gleich) ergibt sich (3.5). Dabei ist  $U$  die Beschleunigungsspannung,  $r$  der Radius der Kreisbahn und  $B$  die Flussdichte des Feldes. Durch Einsetzen der Messwerte erhält man in etwa den Literaturwert von  $\frac{e}{m_e} = 1,75 \cdot 10^{11} \frac{\text{C}}{\text{kg}}$ .

HELMHOLTZ-Spulen lassen sich mit  $B = \mu_0 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{nI}{R}$  berechnen.

### 3.6 Einheitenumrechnung

Die Nahtstelle zwischen den mechanischen und den elektrischen Einheiten ist die Leistung  $P$ . Es ist  $P = \frac{W}{s} = U \cdot I$  und damit  $\frac{J}{s} = V \cdot A \Leftrightarrow J = VAs$ . Die Einheit von  $B$  ist dann  $[B] = 1 \frac{N}{Am} = \frac{Vs}{m^2}$ , was auf eine Dichte hindeutet.

### 3.7 Übungsaufgaben zu Magnetfeldern

Aufgaben sind dem Arbeitsblatt zu entnehmen.

### 3.8 Hall-Effekt

(Edwin Herbert HALL 1850-1938)

#### 3.8.1 Aufbau und Zielsetzung

Heute werden die folgenden Versuche mit Halbleitern durchgeführt, damals wurden noch Kupferfolien verwendet. Das Ziel dieses Versuches ist die Messung der Flussdichte.

#### 3.8.2 Erklärung

Auf bewegte Elektronen wirkt die Lorentzkraft. Es entsteht ein Elektronenüberschuss und ein -mangel. Die entstehende Spannung  $U_H$  erzeugt ein elektrisches Feld. Nachdem

sich das elektrische Feld aufgebaut hat, kompensiert deren elektrische Feldkraft die Lorentzkraft, denn es werden nur noch gleich viele Elektronen abgelenkt.

Die daraus resultierende elektrische Feldkraft  $\vec{F}_{el}$  wirkt der Lorentzkraft entgegen. Das Feld wird so lange stärker, bis diese elektrische Feldkraft genauso groß ist, wie die Lorentzkraft:  $F_{el} = F_L$ . Die Hall-Spannung ist damit konstant.

Wenn sich aus Messwerten  $B \sim I_{err}$  und  $I_{err} \sim U_H$  ergibt, dann ist auch  $B \sim U_H$ .

### 3.8.3 Bestimmen der magnetischen Flussdichte

Wenn  $F_{el} = F_L$ , dann ist  $ev_e B = e \frac{U}{b}$  und damit

$$(3.6) \quad B = \frac{U_H}{v_e \cdot b}$$

Sei  $n_e$  die Elektronendichte im Halbleiter, dann ist  $n_e = \frac{Q}{V} \Leftrightarrow Q = n_e l b d$ . Da  $I = \frac{Q}{t}$  ist, ist  $I = \frac{n_e l b d}{t} = v_e n_e b d \Leftrightarrow v_e = \frac{I}{n_e b d}$ . Dieses Ergebnis wird in (3.6) eingesetzt:

$$(3.7) \quad U_H = \frac{B \cdot I}{n_e \cdot d}$$

In der Literatur ist  $n = \frac{1}{V}$  und nicht  $n_e = \frac{Q}{V}$ , daher findet man in der Literatur im Nenner noch die Ladung  $e$ .

### 3.8.4 Halbleiter

Beispiele: Germanium, Silizium (4. Hauptgruppe).

In einem Leiter ist je Atom ein Leitungselektron frei, sogenanntes Elektronengas.

In einem Halbleiter reißen manche Bindungen, es entstehen Leitungselektronen.

Halbleiter sind dotierte Metalle. Sind sie n-dotiert, so werden Elemente so miteinander kombiniert, dass pro Germaniumatom ein Elektron zu viel vorliegt. Sind Halbleiter p-dotiert, so liegen Löcher vor, durch Sprünge innerhalb dieser Verbindung fließt Strom (Abbildungen sind den Arbeitsblättern zu entnehmen).

### 3.8.5 Elektronendichte

Aufgabe 1.3 aus Klausur 2 behandelt den HALL-Effekt. Die Anzahl der Elektronen  $n$  in einem Halbleiter ergibt sich mit  $n = \frac{n_e}{e} = \frac{195000 \frac{C}{m^3}}{1,602 \cdot 10^{-19} C} = 1,2 \cdot 10^{24} \frac{1}{m^3}$ . Dies entspricht der Anzahl der Störstellen pro  $m^3$  in einem Halbleiter.

Im Gegensatz dazu wurde früher Kupfer verwendet. Es wird nun berechnet, wie viele Elektronen in einem Kubikmeter Kupfer vorhanden sind, um die Elektronendichte zu vergleichen. Es ist  $M = 63,55u$  und  $\rho = \frac{m}{V} \Leftrightarrow m = 8,96 \cdot 10^6 g$ . Die Stoffmenge von Kupfer ist dann  $n = \frac{m}{M} = 140991 mol$ . Da Kupfer ein Leiter ist, muss nun die Anzahl

der Moleküle berechnet werden, die der Anzahl der Leitungselektronen entspricht. Es ist  $n = \frac{N}{N_A} \Leftrightarrow N = 8,49 \cdot 10^{28}$  Elektronen.

Man verwendet heute Halbleiter, da je kleiner  $n$  ist, die HALL-Spannung desto größer und  $U_H$  damit besser messbar ist.

## 3.9 Induktionsvorgänge

### 3.9.1 Leiterschaukel

Eine Leiterschaukel, durch die kein Strom fließt, wird durch ein Magnetfeld bewegt. Da die Elektronen mit dem Leiter bewegt werden, bewegen sie sich senkrecht zum Magnetfeld und erfahren die entsprechende Lorentzkraft  $F_L$ . Eine Spannung und ein Strom sind an den Leiterenden messbar.

### 3.9.2 Spule

Eine Spule wird an eine Gleichstromquelle angeschlossen. Eine weitere Spule wird in die angeschlossene Spule gelegt.

Beim Einschalten ergibt sich ein positiver Spannungsstoß, beim Ausschalten ein negativer Spannungsstoß. Um eine Spannung auch nach dem Ein- oder Ausschalten messen zu können, wird eine Dreiecks-Spannung verwendet.

### 3.9.3 Lenzsche Regel

Gemeinsame Grundlage aller Induktionsvorgänge ist die Änderung des Magnetfeldes (der Flussdichte).

Nach einem Versuch von LENZ bewegt sich der Ring beim Einschalten schnell nach rechts und geht langsam zurück. Beim Ausschalten bewegt sich der Ring nach links und geht dann langsam zurück.

Eine Umpolung ändert nichts.

**Erklärung:** Da der Ring träge ist, versucht er den Aufbau und den Abbau des Feldes zu behindern, indem er ein Gegenfeld aufbaut oder beim Abbau des Feldes dieses stärkt.

Die Richtung jeder Induktionsspannung wird durch die LENZsche Regel festgelegt. Die Induktionsspannung ist stets so gerichtet, dass sie der Ursache des Induktionsvorgangs entgegen wirkt.

### 3.9.4 Abhängigkeiten der Induktionsspannung

**Versuch:** Erneut werden zwei Spulen verschachtelt. An die äußere Spule (Feldspule) wird ein Strom angelegt, die Spannung der inneren Spule (Induktionsspule) wird gemessen.

sen.

Die Feldspule hat 60 Windungen, die Induktionsspule kann Windungen von 50, 100 und 150 haben. Der Querschnitt der inneren Spule beträgt  $4,5\text{cm}^2$ .

Die Feldspule wird an einen Dreiecksgenerator angeschlossen. Ist die Steigung des Stromes positiv, so ist auch  $U_i$  positiv, ist die Steigung negativ, so liegt auch  $U_i$  im negativen Bereich. Bei keiner Änderung des Stromes ist  $U_i$  null.  $U_i$  ist in jedem Fall konstant, sofern auch die Dreiecksspannung  $\frac{\Delta I}{\Delta t}$  konstant ist.

#### 3.9.4.1 $U_i$ abhängig von Magnetfeldänderung

Es ist  $I_{\max} = 1\text{A}$  (Dreiecksspannung) und  $n = 50$  (Induktionsspule). Indem  $\Delta t$  verändert wird, wird auch  $U_i$  verändert. Der Quotient  $\frac{U_i}{\frac{\Delta I}{\Delta t}}$  ist konstant, sodass  $U_i \sim \frac{\Delta I}{\Delta t}$  ist. Da  $I \sim B$ , ist auch  $U_i \sim \frac{\Delta B}{\Delta t}$  ( $U_i \sim \dot{B}$ ).

#### 3.9.4.2 $U_i$ abhängig von Windungszahl $n$

Diesmal ist  $I_{\max} = 1\text{A}$ ,  $\Delta t = 5\text{s}$  und damit  $\frac{\Delta I}{\Delta t} = 0,2\frac{\text{A}}{\text{s}}$ . Werden die Windungen 50, 100 und 150 der Induktionsspule ausprobiert, so ist  $U_i \sim n$ .

#### 3.9.4.3 Zwischenergebnis

Es ist  $U_i \sim n \cdot \dot{B}$ . Betrachtung der Einheiten:

$[\frac{U_i}{n \cdot \dot{B}}] = 1\text{m}^2$ . Da die Einheit nicht dimensionslos ist, muss die Proportionalitätskonstante noch einen Flächenanteil enthalten (Querschnittsfläche der Induktionsspule).

#### 3.9.4.4 $U_i$ abhängig vom Querschnitt

Es wird  $n = 150$  und  $\frac{\Delta I}{\Delta t} = 0,2\frac{\text{A}}{\text{s}}$  verwendet. Der Versuch wird erneut mit unterschiedlichen Querschnittsflächen  $A$  der Induktionsspule durchgeführt. Dabei ist  $\frac{U_i}{A} = \text{const.}$

#### 3.9.4.5 Zusammenfassung

Insgesamt ergibt sich  $U_i \sim n \cdot A \cdot \dot{B}$ .

Ist die Proportionalitätskonstante 1, so ist  $U_i = n \cdot A \cdot \dot{B}$ .

### 3.9.5 Definition

Das Produkt aus der magnetischen Flussdichte  $B$  und der vom Feld durchsetzten Fläche  $A$  heißt magnetischer Fluss:  $\Phi = A \cdot B$ ,  $[\Phi] = 1\text{Vs} = 1\text{Wb}$ . Dann ist  $\dot{\Phi} = A \cdot \dot{B} + \dot{A} \cdot B$ .

### 3.9.6 Flächenänderung

In einem Generator benutzt man die Änderung der Fläche  $\dot{A}$ , also  $U_i = n \cdot B \cdot \dot{A}$ . Eine Leiterschleife rotiert in einem Magnetfeld, die vom Magnetfeld senkrecht durchsetzte

Fläche verändert sich. Dann ist  $\Phi = \vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos \varphi$  und der Verlauf der Induktionsspannung eine Cosinuskurve.

### 3.9.7 Induktionsgesetz

Es gilt

$$(3.8) \quad U_i = -n \cdot \dot{\Phi}$$

Aufgrund der Lenzschen Regel muss die Induktionsspannung ein negatives Vorzeichen besitzen, denn sie ist stets der Ursache entgegen gerichtet.

## 3.10 Spule im Gleichstromkreis

### 3.10.1 Versuche

#### 3.10.1.1 Glimmlampe

Eine Glimmlampe leuchtet erst ab einer Zündspannung (hier: 75V). Weiterhin leuchtet nur die dem Minuspol zugewandte Seite.

#### 3.10.1.2 Einschalten

einer Spule L. Der Schiebewiderstand R wird so eingestellt, dass beide Lampen gleich hell leuchten.

Wenn der Schalter geschlossen wird, leuchtet die Lampe  $L_1$  sofort hell. Im Spulenzweig aber wird die Lampe  $L_2$  erst allmählich heller und leuchtet erst verspätet gleich hell.

#### 3.10.1.3 Ausschalten

einer Spule. Eine Spule wird mit einer Glimmlampe parallel geschaltet und eine Spannung von  $U = 10V$  angelegt. Beim Einschalten ist kein Glimmen zu beobachten, beim Ausschalten leuchtet die Glimmlampe sehr hell auf der vorher dem Pluspol zugewandten Seite.

### 3.10.2 Ausschaltvorgang

Die Beobachtung in 3.10.1.3 wird hier erklärt. Beim Ausschalten wird die Flussdichte sehr schnell verändert und erzeugt dadurch in der Spule eine so hohe Induktionsspannung, dass die Glimmlampe leuchten kann.

Nach LENZ ist  $U_i$  so gerichtet, dass das entstehende elektrische Feld dem Abbau des Magnetfeldes entgegen wirkt. Das heißt die Elektronen fließen in die umgekehrte Richtung als vorher.

### 3.10.3 Einschaltvorgang

Es folgt die Erklärung für 3.10.1.2. Beim Einschalten wird in der Spule ein Magnetfeld aufgebaut (also verändert). Dadurch entsteht in der Spule selbst eine Induktionsspannung, die so gerichtet ist, dass sie dem Aufbau des Feldes entgegen wirkt.  $U_i$  ist also der äußeren Spannung entgegen gerichtet.

### 3.10.4 Selbstinduktion

Die Änderung der Stromstärke  $\dot{I}$  in einer Spule ( $\rightarrow \dot{B}$ ) erzeugt in der felderzeugenden Spule selbst eine Spannung  $U_i$ , die der Änderung entgegen wirkt. Es gilt (auch hierfür) das Induktionsgesetz (3.8).

### 3.10.5 Induktivität

Im Folgenden wird der innere Teil einer Spule, das annähernd homogene Feld, betrachtet.

#### 3.10.5.1 Versuchsauswertung

Messreihen ergeben, dass  $B \sim I \wedge B \sim n \wedge B \sim \frac{1}{l}$ . Ebenfalls hängt die Flussdichte einer Spule vom Material des Spulinneren ab, sie ist aber unabhängig von der Querschnittsfläche  $A$ .

Daraus ergibt sich, dass  $B \sim \frac{I \cdot n}{l}$ , der Proportionalitätsfaktor ist  $\mu_0$ , die magnetische Feldkonstante:  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} = 1,25 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$ .

Also ist  $B = \mu_0 \frac{I \cdot n}{l}$ . Allgemein gilt  $\oint B ds = \mu_0 \cdot I$ .

#### 3.10.5.2 Spulinneres

Liegt ein magnetisierbares Material im Spulinneren vor, so ist  $B = \mu_r \mu_0 \frac{I \cdot n}{l}$  mit  $\mu_r$  als Permeabilitätszahl. Sie kann als Faktor in den folgenden Überlegungen hinzugefügt werden, wird aber exemplarisch weggelassen.

#### 3.10.5.3 Definition

Für den magnetischen Fluss gilt  $\dot{\Phi} = A \dot{B} = \mu_0 \frac{n \cdot A}{l} \dot{I}$ .

Der magnetische Fluss wird in die Induktionsspannung eingesetzt:

$$U_i = -n^2 \mu_0 \frac{A}{l} \dot{I} = -\mu_0 \frac{n^2 A}{l} \dot{I}$$

$$(3.9) \quad L = -\mu_r \mu_0 \frac{n^2 A}{l} \quad \Leftrightarrow \quad U_i = L \dot{I}$$

(3.9) ist die Induktivität  $L$ .

### 3.10.6 Ein- und Ausschaltvorgänge

#### 3.10.6.1 Diagramm

$U_G(t)$  ist eine Rechteckspannung,  $U_L(t)$  die Spannung der Spule und  $U_R(t)$  die Spannung am Widerstand.

Gesucht ist ein Diagramm, das den kompletten Spannungsverlauf darstellt. Der Spannungsverlauf am Widerstand wird gemessen. Die Spannung steigt solange, bis die Rechteckspannung null ist, dann fällt sie wieder.

#### 3.10.6.2 Funktionale Darstellung der Induktionsspannung

2. Kirchhoffsches Gesetz, 2.1.8.2 (3.10). Da  $U = \frac{W}{Q} = \frac{W_e}{e}$  ist, muss die dem Elektron mitgeteilte Energie null sein. Die Gesamtenergie, die einem Elektron auf dem Weg durch eine Masche mitgeteilt oder abgezogen wird, ist null.

Einschalten:  $U_G(t) = U_0$  ist konstant negativ. Ausschalten:  $U_G(t) = 0$ .

Differenzieren:  $\dot{U}_G + \dot{U}_R + \dot{U}_L = 0$ . Es ist  $U_R(t) = R \cdot I$ ,  $U_G(t) = U_0$  und  $U_L(t) = \dot{I} \cdot L \Leftrightarrow \dot{I} = \frac{U_L(t)}{L}$ . Dann ist  $\dot{U}_R(t) = R\dot{I} = \frac{U_L(t)}{L}R$ .

Also gilt

$$(3.10) \quad U_G(t) + U_L(t) + U_R(t) = 0$$

$$(3.11) \quad \frac{U_L(t)}{L}R + \dot{U}_L(t) = 0$$

Da sich Ausgangsfunktion und Ableitung um den Faktor  $\frac{R}{L}$  unterscheiden, lässt sich vermuten, dass eine Exponentialfunktion vorliegt. Hinzu kommt, dass die Addition nur funktioniert, wenn derselbe Funktionstyp vorliegt. Formt man (3.11) noch weiter um, so erhält man  $\dot{U}_L(t) = -\frac{R}{L}U_L(t)$ .  $U_L(t)$  muss negativ sein, da es der Ursache  $U_G(t)$  entgegen wirkt. Für eine  $e$ -Funktion ist  $U_L(t) = A \cdot e^{b \cdot t}$  und  $\dot{U}_L(t) = A \cdot b \cdot e^{b \cdot t}$ . Durch Einsetzen in die Maschenregel erhält man  $b = -\frac{R}{L}$  und durch Betrachten des Einschaltvorgangs und die LENZsche Regel  $A = -U_0$ .

$$(3.12) \quad U_L(t) = -U_0 \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

$$(3.13) \quad \dot{U}_L(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \cdot \left(-\frac{R}{L}\right)$$

Um zu zeigen, dass (3.12) und (3.13) wahr sind, wird (3.13) in (3.11) (umgeformt) eingesetzt:  $-\dot{U}_L(t) \cdot \frac{L}{R} = -\left(\frac{R}{L}U_0e^{-\frac{R}{L}t}\right) \frac{L}{R} = U_0 \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} = U_L(t)$ . Damit ist die Maschenregel erfüllt.

Beim Ausschaltvorgang ändert sich lediglich das Vorzeichen von  $U_L(t)$ .

### 3.10.6.3 Funktionale Darstellung des Induktionsstroms

Nach (3.10) und Division durch  $R$  ergibt sich für den Induktionsstrom (der in einer Reihenschaltung konstant ist)

$$(3.14) \quad I(t) = \frac{U_R(t)}{R} = -\frac{U_G(t)}{R} - \frac{U_L(t)}{R}$$

$$(3.15) \quad I(t) = -\frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t}\right)$$

$$(3.16) \quad I(t) = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

Beim Ausschaltvorgang ist  $I(0) = -\frac{U_L(t)}{R}$  und damit gilt (3.16).

### 3.10.6.4 Bemerkungen

Die Spule mit Induktivität  $L$  wird als widerstandslos angesehen.  $R$  ist der ohmsche Widerstand. In einem realen Stromkreis wäre  $R = R_L + R_\Omega$ .

### 3.10.7 Energie einer Spule

Im Vergleich zu 2.4.2 sollte nun auch festgestellt werden, wie sich die Energie einer Spule berechnen lässt. Im Magnetfeld einer stromdurchflossenen Spule ist Energie gespeichert. Eine Spekulation im Vergleich zu  $W = \frac{1}{2}CU^2$  lässt  $W = \frac{1}{2}LI^2$  vermuten.

Beim Ausschalten der Spule fallen  $U_i(t)$  und  $I(t)$  ab. Wenn  $U$  und  $I$  zeitlich konstant sind, so ist  $W = U \cdot I \cdot t$ .

Genauer ist aber  $W = \int_{t_1}^{t_2} U_i(t) \cdot I(t) dt$ , wenn  $t_1$  der Zeitpunkt des Abschaltens und  $t_2$  der Zeitpunkt  $I(t_2) = 0$  ist.

Nach (3.12) und (3.16) ist  $U_i = -L \cdot \dot{I}$  und dann  $U_i = -L \frac{dI}{dt}$ . Für die Energie einer Spule lässt sich folgende Formel herleiten:

$$(3.17) \quad W = -L \int_{t_1}^{t_2} \frac{dI}{dt} \cdot I \cdot dt = -L \int_{I_0}^0 I dI = -\frac{1}{2}L [I^2]_{I_0}^0 = \frac{1}{2}LI_0^2$$

## 3.11 Lade- und Entladevorgang eines Kondensators im Gleichstromkreis

### 3.11.1 Versuch

Der Versuchsaufbau ist identisch mit dem aus 3.10.6.1, die Spule wurde durch einen Kondensator ersetzt.

### 3.11.2 Spannung und Stromstärke im Widerstandskreis

(3.10) wird erneut verwendet:

$$(3.18) \quad U_G(t) + R\dot{I}(t) + \frac{Q(t)}{C} = 0 \quad \left| \frac{d}{dt} \right.$$

$$R \cdot \dot{I}(t) + I(t) \cdot \frac{1}{C} = 0$$

$$(3.19) \quad \dot{I}(t) + I(t) \cdot \frac{1}{R \cdot C} = 0$$

Auch nach (3.19) müssen beide Terme gleichartig sein. Es werden ähnliche Überlegungen wie in 3.10.6.2 angestellt. Dann ist  $b = -\frac{1}{R \cdot C}$  und damit

$$(3.20) \quad I(t) = I_0 e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}$$

$$(3.21) \quad U_C(t) = -U_G(t) - R \cdot I_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}$$

Wird der Kondensator aufgeladen, so ist  $I(0) = -\frac{U_G(0)}{R} - \frac{Q(0)}{C \cdot R} = -\frac{U_0}{R}$  nach (3.18) und kann damit direkt für  $I_0$  in (3.20) ersetzt werden, sodass  $I(t) = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}$ .

Währenddessen ist die Spannung  $U_C(t) = -U_0 \left(1 - e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}\right)$ .

Für den Entladevorgang ist  $I(t) = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}$  und  $U_C(t) = -U_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}$ .

### 3.11.3 Bedeutung von $RC$

Die Einheit ist  $[RC] = 1\omega F = \frac{V}{A} \cdot \frac{As}{V} = s$ .  $RC$  wird Zeitkonstante genannt.

Mit der Ausschaltstromstärke  $I(t) = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}$  ist  $I(0) = \frac{U_0}{R}$ ,  $I(RC) = \frac{U_0}{R} \cdot e^{-1}$ ,  $I(2RC) = \frac{U_0}{R} \cdot e^{-2}$ .

In der Zeit  $RC = \tau$  fällt die Stromstärke um den Faktor  $\frac{1}{e}$ .

### 3.11.4 Beispiele

Wie lange dauert es, bis ein Kondensator zu 90% geladen ist?

Es ist  $U_C(t) = 0,9U_0$  und  $|U_C(t)| = U_0 \left(1 - e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}\right)$ , also  $\ln 0,9 = -\frac{1}{R \cdot C} t \Leftrightarrow t = -R \cdot C \cdot \ln 0,9$ . Wenn  $C = 0,47\mu F$  und  $R = 1k\Omega$ , dann ist  $t = 4,95 \cdot 10^{-5}s$ .

**Halbwertszeit** des Kondensators:

$$(3.22) \quad T_H = RC \ln 2$$

$$(3.23) \quad \frac{1}{RC} = \frac{\ln 2}{T_H}$$

# 4 Wellenoptik

## 4.1 Reflexion und Interferenz von Wellen

### 4.1.1 Einführung in mechanische Schwingungen

#### 4.1.1.1 Mechanische Schwingungen

I Fadenpendel (Pendeluhr, Metronom)

II Blattfeder

III Wasser in einem U-Rohr (Ebbe und Flut)

IV Federpendel (Unruh in Uhr)

#### 4.1.1.2 Gemeinsame Eigenschaften

Ein Oszillator ist ein schwingungsfähiger Körper. Die Bewegung ist periodisch, das heißt die Bewegungszustände wiederholen sich in gleichen Zeitabständen.

Die Bewegung verläuft zwischen zwei Umkehrpunkten um eine Ruhelage.

#### 4.1.1.3 Größen zur Beschreibung

1. Schwingungsdauer (Periodendauer):

Dauer  $T$  einer vollen Schwingung ist  $T = \frac{\text{Zeit für } n \text{ Schwingungen}}{\text{Anzahl } n \text{ der Schwingungen}} = \frac{t}{n}$ .

2. Frequenz  $f = \frac{\text{Anzahl der Schwingungen}}{\text{Zeit}} = \frac{n}{t}$

3. Momentane Auslenkung  $y(t)$ . Elongation: Weg, den der schwingende Körper zur Zeit  $t$  von der Ruhelage entfernt ist.

4. Amplitude  $\hat{y}$  ist die maximale Elongation.

5. Bei einer gedämpften Schwingung nimmt die Amplitude mit der Zeit ab.

6. Sind die Kräfte, die den schwingenden Körper wieder in die Ruhelage ziehen, proportional zur Elongation, heißt die Schwingung harmonisch.

#### 4.1.1.4 Vergleich zwischen Fadenpendel und Kreisbewegung

Projiziert man eine Kreisbewegung von der Seite an eine Wand, so entspricht die Bewegung des Schattens der Bewegung eines Fadenpendels.

Der Winkel  $\varphi$  wächst proportional mit der Zeit  $\varphi \sim t \Rightarrow \frac{\varphi}{t} = \omega$  heißt Winkelgeschwindigkeit und ist hier konstant.

$\frac{y(t)}{r} = \sin \varphi \Leftrightarrow y(t) = r \cdot \sin \varphi = \hat{y} \cdot \sin \omega t$  mit  $r = \hat{y}$  und  $\varphi = \omega \cdot t$ . Der Winkel  $\varphi$  wird im Bogemaß gemessen. Es ist  $\frac{b_{\alpha}}{2\pi r} = \frac{\alpha}{360^{\circ}}$ . Die Winkelgeschwindigkeit lässt sich auch mit der Frequenz ausdrücken  $\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ .

Also ist  $y(t) = \hat{y} \sin 2\pi f t$  mit  $\varphi$  als Phasenwinkel bzw. Phase.

#### 4.1.2 Entstehung und Ausbreitung einer Welle

Arbeitsblätter „Entstehung einer Welle“ und „Ausbreitung einer Längs- oder Longitudinalwelle“.

**Beispiel:** mechanische Welle: Wellenmaschine. Auf einer Kette gekoppelter Pendel wird eine Störung weitergegeben, so dass jedes Pendel zeitlich versetzt die gleiche Bewegung durchführt. Somit liegt ein linearer Wellenträger vor, denn benachbarte Punkte sind nicht in Phase.

Eine Welle ist eine zeitlich und räumlich periodische Bewegung:

Zeitliche Periode: Schwingungsdauer  $T$

Räumliche Periode: Wellenlänge  $\lambda$

Die Wellenlänge ist der kürzeste Abstand zweier Oszillatoren, die in Phase sind.

Bei einer Welle bewegen sich die Schwingungszustände (Phasen) in der Zeit  $T$  um die Strecke  $\lambda$ :

(Phasen-)Geschwindigkeit  $v = \frac{\lambda}{t}$  bzw.  $c = \frac{\lambda}{t} = \lambda f$ .

#### 4.1.3 Interferenz

Auf einem unendlich ausgedehnten Wellenträger breitet sich eine Störung als Kreiswelle bzw. Kugelwelle nach allen Seiten gleich aus.

Treffen mehrere (Kreis-)Wellen aufeinander, so überlagern sie sich ungestört. Ihre Elongationen addieren sich an jedem Punkt, an dem sie aufeinander treffen. Nach dem Zusammentreffen laufen sie ungestört weiter.

Überlagern sich mehrere Wellen gleicher Frequenz (und gleicher Wellenlänge) am selben Ort, so bezeichnet man diesen Vorgang als Interferenz.

## 4 Wellenoptik

Die Überlagerung zweier Kreiswellen gleicher Frequenz und Amplitude wird als Interferenz bezeichnet.

**Versuch 1:** Interferenz zweier kreisförmiger Wasserwellen. Im Gebiet zwischen den Wellenzentren gibt es hyperbelförmige helle und dunkle Streifen (Abbildung ??).

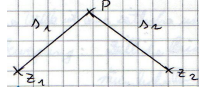


Abbildung 4.1: Punkt P

An diesen Stellen verstärken sich die Wellen maximal (helle Streifen) oder löschen sich aus (dunkle Streifen).

In P kommen die Wellen mit einer Phasendifferenz  $\Delta\varphi$  oder einem Gangunterschied  $\Delta s = s_1 - s_2$  an (Abbildung 4.2).

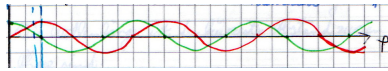


Abbildung 4.2: Phasendifferenz  $\Delta\varphi$

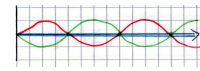


Abbildung 4.3: Auslöschung

Dunkle Streifen: Treffen zwei Wellen gegenphasig ( $\Delta\varphi = \pi$ ) aufeinander, löschen sie sich aus (Abbildung 4.3).

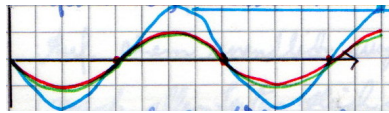


Abbildung 4.4: Verstärkung

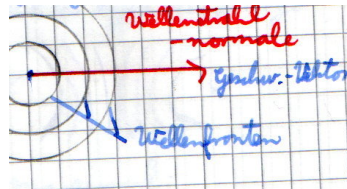


Abbildung 4.5: Ausbreitung in Richtung der Wellennormale

Treffen sie gleichphasig ( $\Delta\varphi = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$ ) aufeinander, verstärken sie sich maximal (Abbildung 4.4).

Bei Interferenz zweier Wellen ergibt sich maximale Verstärkung bei

→ einer Phasendifferenz von  $\Delta\varphi = n \cdot 2\pi (n \in \mathbb{N}^0)$

→ einem Gangunterschied  $\Delta s = n \cdot \lambda (n \in \mathbb{N}^0)$

$n$ : Ordnung des Maximums. Maximale Abschwächung bei

→ einer Phasendifferenz von  $\Delta\varphi = \pi(2n + 1) (n \in \mathbb{N}^0)$

→ einem Gangunterschied  $\Delta s = (2n + 1) \frac{\lambda}{2} (n \in \mathbb{N}^0)$

### 4.1.3.1 Erklärung der geometrischen Optik nach Huygens

Jeder Punkt einer Wellenfront kann als Ausgangspunkt einer Kreiswelle (Abbildung 4.5) angesehen werden.

Wellenfronten entstehen durch Überlagerung an Kreiswellen (Abbildung 4.6).

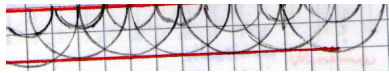


Abbildung 4.6: Wellenfront



Abbildung 4.7: Beugung geradlinig angeordneter Wellenzentren

### 4.1.3.2 Beugung

Eine Kette von geradlinig angeordneten Wellenzentren ergibt eine ebene Wellenfront (Abbildung 4.7). Es findet eine Beugung statt, Elementarwellen sind hinter einem Spalt der Breite  $d$  zu beobachten.

Ist  $\lambda \approx d$ , breitet sich hinter dem Spalt eine Kreiswelle in alle Richtungen aus, also auch in den Schattenraum.

### 4.1.3.3 Brechung

**Versuch:** In einer Wellenwanne variiert die Tiefe des Wassers. Die Wellen werden gebrochen. Es kann ein stroboskopisches Standbild erstellt werden, also bleibt die Frequenz gleich (das Bild steht, Abbildung 4.8). Im flachen Wasser ist die Wellenlänge  $\lambda_2$  kleiner als  $\lambda_1$  im tiefen Wasser.

Die bestimmende Größe zur Beschreibung einer Welle ist die Frequenz.

Nach  $c = \lambda \cdot f$  ist die Geschwindigkeit der Welle im flachen Wasser kleiner als im tiefen Wasser.

Eine Welle ändert beim Übergang von einem Medium in ein anderes ihre Geschwindigkeit. Nach Abbildung ?? kann diese Änderung der Geschwindigkeit berechnet werden:

$\overline{A_1 B_2}$  ist die Hypotenuse,  $\sin \alpha = \frac{2\lambda_1}{|\overline{A_1 B_2}|} = \frac{2c_1 T}{|\overline{A_1 B_2}|}$  und  $\sin \alpha = \frac{2\lambda_2}{|\overline{A_1 B_2}|} = \frac{2c_2 T}{|\overline{A_1 B_2}|}$ .

Snelliussches Brechungsgesetz:  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2}$ .

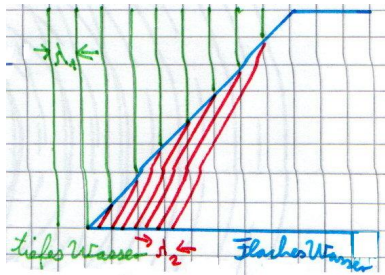


Abbildung 4.8: Brechung in einer Wellenwanne

#### 4.1.3.4 Aufgaben zur Brechung

**Aufgabe 1:** In einer Wellenwanne läuft eine Welle von einem seichten Bereich in ein Gebiet mit tieferem Wasser unter dem Einfallswinkel von  $45^\circ$  und dem Brechungswinkel  $60^\circ$ .

Bestimmen Sie das Verhältnis der Geschwindigkeiten in beiden Teilen der Wellenwanne. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit im flachen Teil, wenn sie im tiefen  $25\text{cm/s}$  ist.

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{3} \wedge \frac{c_1}{c_2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow c_2 = 25 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \wedge c_1 = 20,41 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

**Aufgabe 2:** Wasserwellen bewegen sich in tiefem Wasser mit der Geschwindigkeit  $v_1 = 34\text{ cm/s}$ . Sie treffen unter dem Winkel  $\alpha = 60^\circ$  auf die Grenzlinie zu einem flacheren Teil, wo sie sich mit  $v_2 = 24\text{cm/s}$  bewegen. Erhöht man die Frequenz ein wenig, so sinkt die Geschwindigkeit im tieferen Teil auf  $v_1 = 32\text{cm/s}$ .

Berechnen Sie in beiden Fällen den Brechungswinkel.

Die Wellenlänge im tieferen Teil beträgt im ersten Versuch  $\lambda = 1,7\text{cm}$ . Wie groß ist die Wellenlänge im flacheren Teil und welche Frequenz hat die Welle?

$$\frac{\sin 60^\circ}{\sin \beta} = \frac{34 \frac{\text{cm}}{\text{s}}}{24 \frac{\text{cm}}{\text{s}}} \Leftrightarrow \beta = 37,68^\circ \text{ und } \beta = 40,5^\circ.$$

$$f = \frac{v_1}{\lambda_1} = 20\text{Hz}, \text{ da } f \text{ gleich bleibt, ist } \lambda_2 = 1,2\text{cm}.$$

#### 4.1.4 Doppelspaltversuch nach Young

Der **Versuch** wird wie in Abbildung 4.9 dargestellt durchgeführt. Der Beleuchtungsspalt wird scharf auf dem Schirm abgebildet, dann der Doppelspalt eingefügt.

Beobachtung: Das schmale Bild verbreitert sich. Eine Struktur aus hellen und dunklen Streifen mit farbigen Rändern ist erkennbar.

Dieses Experiment gilt als *Experimentum crucis*, es sollte das entscheidende Experiment für den Streit - ob Licht ein Teilchen (NEWTON) oder eine Welle (HUYGENS) ist - sein. Die Beugungsfigur kann mit dem Wellenmodell erklärt werden:

Jede Spaltöffnung stellt das Erregerzentrum einer kreisförmigen Elementarwelle dar (in Abbildung 4.10 ist je eine Wellennormale (rot) eingezeichnet). In  $L_1$  und  $L_2$  ist das Licht kohärent (gleichphasig und gleichfrequent und gleiche Amplitude).

In  $P_0$  treffen die Wellen von  $L_1$  und  $L_2$  mit derselben zurückgelegten Strecke auf. Dort

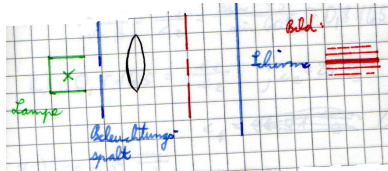


Abbildung 4.9: Aufbau des Doppelspaltversuches

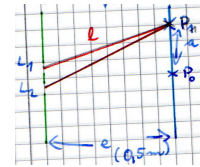


Abbildung 4.10: Erklärung der Beugungsfigur

verstärken sie sich also und es sind helle Streifen zu erkennen.

Rechts und links von  $P_0$  kommen die Wellen mit Gangunterschieden  $\Delta s$  an. Der Abstand der Spaltmitten ist  $d = 0,4\text{mm}$  groß. Da  $e \gg d$  kann man  $L_1P_0$  und  $L_2P_0$  als parallel ansehen:  $\Delta s = |L_2P_0| - |L_1P_0|$ .

### 4.1.5 Michelson-Interferometer

Der Aufbau des Michelson-Morley-Interferometers ist in [Abbildung 4.11](#) dargestellt.

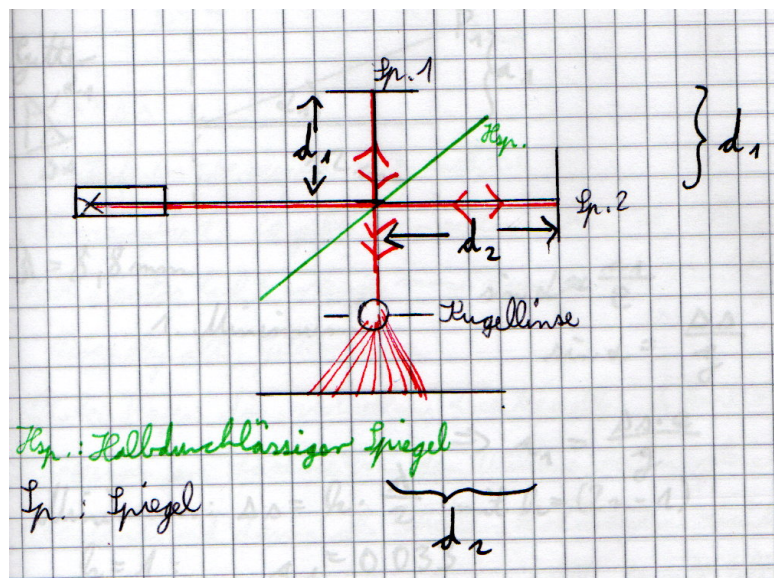


Abbildung 4.11: Aufbau eines Michelson-Morley-Interferometers

Das Interferometer wird in [7.2](#) näher erläutert.

### 4.1.6 Bragg-Beziehung: Reflexion an Kristallen

#### 4.1.6.1 Erzeugen von Röntgen-Strahlung

1895 von WILHELM CONRAD RÖNTGEN durchgeführt.

Zwischen Kathode und Anode werden die Elektronen durch  $U_A$  auf die Geschwindigkeit  $v$  beschleunigt. Es gilt  $\frac{m_e}{2} \cdot v_e^2 = eU_A \Leftrightarrow v_e = \sqrt{\frac{2eU_A}{m_e}}$ , mit  $U_A = 35 \cdot 10^3 \text{V}$  ist dann  $v_e = 1,1 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx \frac{1}{3} c_{\text{Licht}}$ .

Die Elektronen prallen auf die Anode, werden auf kürzestem Wege gebremst und geben ihre gesamte Energie ab. Der größte Teil der Energie wird als Wärme, ein kleinerer Teil wird in Form von Röntgenstrahlung abgegeben.

Die Fläche unter dem Molybdän-Röntgenspektrum stellt die Bremsstrahlung dar. Die Intensitätsmaxima sind charakteristisch für das Anodenmaterial und entstehen durch Elektronensprünge im Innern der Atomhülle.

#### 4.1.6.2 Modellversuche zur Reflexion

Eigenschaften von Mikrowellen: Sie durchdringen Styropor ungehindert und werden von Aluminium reflektiert.

**Versuch 1:** An einem Stück Styropor mit regelmäßig aufgeklebten Aluplättchen wird die Mikrowelle ( $\lambda = 3,18 \text{cm}$ ) reflektiert.

Beobachtung: Ein geringer Teil der Welle wird nach dem Reflexionsgesetz  $\alpha = \beta$  reflektiert.

Ergebnis: Die einzelnen Plättchen dienen als Streuzentren, damit entstehen neue Kreiswellen nach HUYGENS. Nur unter dem Reflexionswinkel  $\alpha = \beta$  ergibt sich konstruktive Interferenz und damit sind Intensitätsmaxima zu beobachten. Dabei ist  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ .

**Versuch 2:** Hinter das erste Styropor-Alu-System wird im Abstand  $d$  ein zweites gesetzt.

Beobachtung: Lässt man  $\alpha$  unverändert, sodass eine Reflexion stattfindet, und verändert  $d$ , so zeigen sich Intensitätsschwankungen, in bestimmten Abständen verschwindet das Signal.

#### 4.1.6.3 Ermitteln der Glanzwinkel $\vartheta$

**Versuch 3:** Material: Röntgengerät, Kristall, Anode (Anionen, negativ geladene Teilchen, bewegen sich zur Anode), Kathode, Hochspannung, NaCl.

Röntgenstrahlen treffen in einem bestimmten Winkel auf den Kristall mit Netzebenenabstand  $d$  und werden mit einer Bragg-Apparatur analysiert. Dazu wird ein Goniometer (automatische Winkeleinstellmaschine) und ein Geiger-Müller-Zählrohr zur Messung der Position der Glanzwinkel (in diesem Bereich sind Intensitätsmaxima zu beobachten) verwendet.

Geiger-Müller-Zählrohr: Eintreffende Strahlung ionisiert das Füllgas, dadurch sind Stromstöße (Entladungen) pro Zeit messbar.

Das Goniometer bewegt den Zieltisch (und damit den Kristall), es dreht den Zieltisch um  $\vartheta$  und den Sensorarm um  $2\vartheta$ .

## 4 Wellenoptik

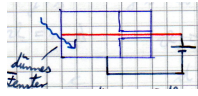


Abbildung 4.12: Aufbau eines Geiger-Müller-Zählrohres

Beobachtung: Die gemessenen Glanzwinkel (nach Abbildung ??  $\vartheta_1$  und  $\vartheta_2$ ) lassen sich zwei Wellenlängen zuordnen. Mit  $2d \sin \vartheta = n\lambda$  mit  $\vartheta$  als Glanzwinkel lässt sich der Netzebenenabstand bestimmen (Tabelle 4.1).

n-tes Maximum	$\lambda_\beta = 63,1 \text{ pm}$	$\lambda_\alpha = 71,1 \text{ pm}$	$d_\beta \cdot 10^{-12}$	$d_\alpha \cdot 10^{-12}$
n=1	$6,4^\circ$	$7,2^\circ$	283,1	283,64
n=2	$12,9^\circ$	$14,5^\circ$	282,64	283,97
n=3	$19,7^\circ$	$22^\circ$	280,78	284,7

Tabelle 4.1: Messwerte Bragg-Apparatur NaCl

Der Netzebenenabstand bei NaCl beträgt etwa  $d = 280 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ .  
Lithiumfluorid (Tabelle 4.2):

n-tes Maximum	$\lambda_\beta = 63,1 \text{ pm}$	$\lambda_\alpha = 71,1 \text{ pm}$	$d_\beta \cdot 10^{-12}$	$d_\alpha \cdot 10^{-12}$
n=1	$9^\circ$	$10,1^\circ$	202	203
n=2	$18,2^\circ$	$20,6^\circ$	202	202
n=3	$27,6^\circ$	$31,8^\circ$	204	202

Tabelle 4.2: Messwerte Bragg-Apparatur Lithiumfluorid

### 4.1.7 Aufgaben zur Röntgenspektroskopie

In einer Röntgenröhre treffen Elektronen mit der Geschwindigkeit  $v = 0,3c$  auf die Anode.

a) Zeigen Sie durch Rechnung, dass dabei Röntgenphotonen mit einer maximalen Frequenz  $\nu_{\text{max}} = 6,0 \cdot 10^{18} \text{ Hz}$  entstehen können.

Energieerhaltungssatz: Es ist  $c = 3,0 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ,  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ,  $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ,

$E = h \cdot \nu$  und  $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2$ , also  $\nu = \frac{m_e v^2}{2h} = 5,562 \cdot 10^{18}$ ,  $[\nu] = 1 \frac{\text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{\text{J} \cdot \text{s}} = 1 \text{ Hz}$ .

Die von der Anode emittierte Strahlung wird nun mit Hilfe einer Bragg-Apparatur analysiert. Bei Verwendung eines Kristalls mit einem Netzebenenabstand von  $d = 2,01 \cdot 10^{-10} \text{ m}$  ergibt sich die nebenstehende Intensitätsverteilung; sie zeigt nur Interferenzen erster Ordnung.  $\theta$  ist der Winkel zwischen der einfallenden Strahlung und der Kristalloberfläche.

b) Berechnen Sie die Frequenzen, die zu den Winkeln  $\theta_0 = 7,2^\circ$ ,  $\theta_1 = 8,7^\circ$  und  $\theta_2 = 10,3^\circ$  gehören.

Es gilt  $2d \sin \vartheta = n \cdot \lambda$ . Da nur Interferenzen erster Ordnung erscheinen, ist  $n = 1$ . Weiterhin ist  $c = \lambda \cdot \nu$ , also  $2d \sin \vartheta = \frac{c}{\nu} \Leftrightarrow \nu = \frac{c}{2d \sin \vartheta}$  ( $[\nu] = \frac{\frac{\text{m}}{\text{s}}}{\text{m}} = \text{Hz}$ ). Dann ist  $\nu_0 = 6 \cdot 10^{18} \text{Hz}$ ,  $\nu_1 = 4,9 \cdot 10^{18} \text{Hz}$  und  $\nu_2 = 4,2 \cdot 10^{18} \text{Hz}$ .

c) Wie ändert sich die Intensitätsverteilung, wenn entweder die Beschleunigungsspannung der Röhre oder der Heizstrom der Glühkathode erhöht wird? Begründen Sie Ihre Antwort.

Die Glanzwinkel ändern sich nicht, da diese materialabhängig sind. Die Intensität wird größer.

c) Monochromatische, parallele Röntgenstrahlung der Wellenlänge  $\lambda = 72 \text{pm}$  trifft auf einen Einkristall mit dem Netzebenenabstand  $d$ . Die reflektierte Röntgenstrahlung wird mit Hilfe eines Zählrohres nachgewiesen. Unter bestimmten Glanzwinkeln  $\varphi_n$  beobachtet man Intensitätsmaxima.

Leiten Sie mit Hilfe einer Skizze eine Beziehung für die Glanzwinkel  $\varphi_n$  her. Mit der Anordnung ergeben sich zwei aufeinanderfolgende Maxima für die Glanzwinkel  $\varphi_n = 28,0^\circ$  und  $\varphi_{n+1} = 38,8^\circ$ . Berechnen Sie daraus den Netzebenenabstand  $d$  und die Ordnungszahl  $n$ .

Nach Abbildung ?? ergibt sich  $2d \sin \varphi = n \cdot \lambda$ , Aufstellen eines Gleichungssystems

$\left| \begin{array}{l} 2d \sin \varphi_n = n \cdot \lambda \\ 2d \sin \varphi_{n+1} = (n+1)\lambda \end{array} \right|$  Die Lösung dieses Systems ist  $d = 2,485 \cdot 10^{-10} \text{m} \wedge n = 3,326 \approx 3$ , dies sind also Maxima 3. Ordnung.

## 4.2 Stehende Welle

### 4.2.1 Entstehung

Stehende Wellen entstehen durch Überlagerung von Wellen gleicher Frequenz und Amplitude, die gegeneinander laufen. Sie können zum Beispiel durch Reflexion erzeugt werden.

### 4.2.2 Reflexion am festen Ende

Bei der Reflexion am festen Ende wird ein Wellenberg zum Wellental (Änderung der Schnelle). Es findet ein Phasensprung statt.

Erklärungen diesbezüglich sind dem Dorn Bader zu entnehmen (Info-Zettel).

### 4.2.3 Reflexion am losen Ende

Bei der Reflexion am losen Ende bleibt ein Wellenberg ein Wellenberg. Es findet kein Phasensprung statt.

### 4.2.4 Zusammenfassung

Eine Transversalwelle wird am festen Ende mit einem Phasensprung  $\Delta\varphi = \pi$  reflektiert, am losen Ende ohne Phasensprung.

Der Wellenberg wird am festen Ende als Wellental und am losen Ende wieder als Wellenberg reflektiert.

### 4.2.5 Stehende Wellen auf begrenzten Wellenträgern

Die Länge des Trägers ist  $l$ , dann gilt für die Grundschwingung  $l = \frac{1}{2}\lambda_0$  und  $f = f_0$ .

Für die 1. Oberschwingung (drei Knoten) gilt  $l = \lambda_1$  und  $f = 2f_0$ .

Weiterhin ist  $l = \frac{3}{2}\lambda_2$  und  $f = 3f_0$  in der dritten Oberschwingung.

# 5 Quantenphysik

## 5.1 Lichtelektrischer Effekt oder Photoeffekt

### 5.1.1 Definitionen und Versuche

#### 5.1.1.1 Energie des Lichts

**Versuch 1:** Zunächst werden die Zinkplatte und das Elektroskop positiv geladen, nach Anschalten der Lampe ist keine Veränderung zu beobachten.

Sind Zinkplatte und Elektrode negativ geladen und wird dann die Lampe angeschaltet, ist ein Ausschlag beim Elektroskop erkennbar. Der Ausschlag geht nach Ausschalten der Lampe sofort zurück.

**Versuch 2:** Das Amperemeter zeigt einen Photostrom  $I_{ph}$  an.

**Erklärung** zu 1 und 2: Das Licht überträgt Energie auf die Elektronen des Metalls, die dann durch Zufuhr von Austrittsarbeit  $W_A$  aus dem Metall austreten können. Der Photoeffekt beschreibt also die Fähigkeit des Lichts, Elektronen aus Metalloberflächen auszulösen.

#### 5.1.1.2 Faktoren, die die Lichtenergie beeinflussen

**Versuch 3:** Parametervariation:

Je dichter die Lampe vor der Platte steht, umso größer ist die Intensität, umso mehr Elektronen werden ausgelöst:  $I_{ph}$  wird größer.

Eine Glasscheibe wird vor die Hg-Lampe gehalten. Unabhängig vom Abstand und damit unabhängig von der Intensität des Lichts geht die  $I_{ph}$ -Anzeige auf Null zurück.

**Versuch 4:** Verbesserter Aufbau einer Photozelle: Cäsium und eine Platinelektrode befinden sich in einem kleinen Gehäuse. Schon bei Tageslicht fließt ein messbarer Photostrom, auch wenn eine Glasplatte vor der Photozelle steht.

**Erklärung** zu 3 und 4: Elektronen nehmen aus dem Licht die Austrittsarbeit  $W_A$  auf und kinetische Energie  $W_{kin}$ , die es ihnen ermöglicht, zur Platinelektrode zu fliegen. Die Lichtenergie liefert also die Austrittsarbeit und die kinetische Energie.

**Versuch 5:** Bestrahlung mit einer Glühlampe.

Beobachtung: Schon bei niederfrequentem Licht werden Photoelektronen ausgelöst.

**Erklärung** zu 5: Die Austrittsarbeit  $W_A$  von Cäsium ist anders (geringer) als die von

Zink.

### 5.1.1.3 Methoden zur Messung

**Versuch 6:** Gegenfeldmethode zur Messung der maximalen kinetischen Energie der Elektronen. An der Elektrode wird eine Spannung angelegt, die gerade so groß ist, dass der Photostrom Null ist. Die Elektronen kommen nicht mehr an der Elektrode an, werden aber nach wie vor ausgelöst.

Verändern der Gegenspannung.

Wird die Gegenspannung erhöht, sinkt die Photostromstärke bis auf 0A.

**Erklärung zu 6:** Die ausgelösten Elektronen müssen gegen eine elektrische Spannung  $U$  anlaufen, die so hochgeregelt wird, dass der Photostrom  $I_{\text{ph}} = 0$  wird. Sie werden im Gegenfeld abgebremst. Mit zunehmender Gegenspannung erreichen immer weniger Photoelektronen die Anode, bis auch die schnellsten Elektronen es nicht mehr schaffen (diejenigen Elektronen, die den kürzesten Weg durch das Feld zur Elektrode zurücklegen). Bei diesem Wert  $U_0$  der Gegenspannung wird die gesamte kinetische Energie der schnellsten Elektronen ( $W_{\text{kin,max}}$  durch das elektrische Gegenfeld aufgebraucht.

$$\Rightarrow W_{\text{kin,max}} = e \cdot U$$

### 5.1.1.4 Einfluss der Lichtintensität

**Versuch 7:** Die Intensität wird durch Verringerung des Abstandes oder durch Verbreiterung des Spaltes vergrößert.

Beobachtung: Bei einem breiten Spalt ist ein hoher Photostrom messbar, wohingegen bei einem schmalen Spalt nur ein geringer Photostrom gemessen wird.

**Aber:** Die Gegenspannung  $U_0$ , bei der  $I_{\text{ph}} = 0\text{A}$  ist, ändert sich nicht.

**Erklärung zu 7:** Die Intensität des Lichtes hat keinen Einfluss auf die kinetische Energie der Photoelektronen, sie bestimmt nur die Zahl der ausgelösten Elektronen.

### 5.1.1.5 Einfluss der Frequenz

**Versuch 8:** Es werden mehrere Frequenzen des Lichts eingestrahlt.

Farbe	gelb	grün	blau	violett
$\lambda$ in nm	577	546	490	436
$f$ in $10^{14}\text{Hz}$	5,2	5,5	6,1	6,9
$U_0$ in V	0,45	0,7	0,85	1,25

Tabelle 5.1: Gegenspannung in Abhängigkeit von der Frequenz  $f$

Eine Zeichnung im Graphen erinnert an eine Gerade.

Daran können Grenzfrequenz (die minimal einzustrahlende Frequenz, damit Elektronen austreten) und Austrittsarbeit erkannt werden nach Abbildung.

**Erklärung zu 8:** Die maximale Gegenspannung nimmt mit wachsender Frequenz linear zu.

Die Gerade  $U_0(f)$  schneidet die  $f$ -Achse bei  $f_{Gr}$ , der Grenzfrequenz. Unterhalb von  $f_{Gr}$  ist das Licht nicht in der Lage, Elektronen aus Cäsium auszulösen.

## 5.1.2 Mathematische Auswertung

### 5.1.2.1 Elektronenvolt

Elektronenvolt:  $1\text{eV} = 1e = 1,6022 \cdot 10^{-19}\text{C} \cdot 1\text{V} = 1,6022 \cdot 10^{-19}\text{VAs} = 1,6022 \cdot 10^{-19}\text{J}$

### 5.1.2.2 Auswertung

...des Photoeffekts zur Berechnung der Energien.

$U_0$  ist ein Maß für die kinetische Energie  $W_{\text{kin,max}}$ . Bei  $I_{\text{ph}} = 0\text{A}$  gilt dann  $eU = W_{\text{kin,max}}$ . Die Angabe der kinetischen Energie kann ohne Änderung der Skalierung in Elektronenvolt angegeben werden und anstatt  $U_0$  die  $y$ -Achse darstellen.

Die Messwerte können durch eine Gerade verbunden werden. Die allgemeine Form  $y = m \cdot x + b$  kann dabei umgeformt werden zu  $W_{\text{kin,max}} = A \cdot f - B$ .

Die Steigung  $A$  ist dann  $\frac{\Delta W}{\Delta f} = \frac{W_{\text{violett}} - W_{\text{gelb}}}{f_{\text{violett}} - f_{\text{gelb}}} = \frac{e(1,25 - 0,45)\text{J}}{6,87 \cdot 10^{14} - 5,19 \cdot 10^{14} \frac{1}{\text{s}}} = 7,62 \cdot 10^{-34}\text{J} \cdot \text{s} = 4,755 \cdot 10^{-15}\text{eVs}$ .

Der Achsenabschnitt  $B$  ist nach Abbildung ?? charakteristisch für das verwendete Metall. In diesem Fall ist  $B = A \cdot f_{\text{violett}} - W_{\text{kin,max}} = 2,01\text{eV}$ .

Für die maximale kinetische Energie der Elektronen gilt dann hier  $W_{\text{kin,max}} = 4,755 \cdot 10^{-15}\text{eVs} \cdot f - 2,01\text{eV}$ .

### 5.1.2.3 Physikalische Bedeutung von A und B

Für andere Kathodenmaterialien (zum Beispiel Natrium und Calcium) sind die  $W_{\text{kin,max}}(f)$  parallel zur Geraden bei Cäsium.

Damit ist die Steigung  $A$  eine universelle Naturkonstante. Benannt nach seinem Entdecker und der Eigenschaft, dass es das Produkt aus Energie und Zeit, also eine Wirkung darstellt, heißt es PLANCKSCHES WIRKUNGSQUANTUM und ist  $h = 6,625 \cdot 10^{-34}\text{Js}$ .

$B$  ist jedoch stoffabhängig. Erst, wenn den Elektronen eine Energie zugeführt wird, die der Grenzfrequenz entspricht, werden Elektronen ausgelöst. Also ist  $B = W_A$ .

### 5.1.2.4 Zusammenfassung

Der lichtelektrische Effekt wird energetisch durch die Gleichung  $W_{\text{kin,max}} = hf - W_A$  beschrieben.

$W_{\text{kin,max}}$  ist die kinetische Energie der schnellsten Elektronen.

$hf$  ist die vom Licht bereitgestellte Energie und  $W_A$  die Austrittsarbeit.

Ein Elektronenvolt ist die Energie, die auf dem Weg von Kathode zu Anode bei  $e$  und  $U = 1V$  verrichtet werden muss.

Die Steigung des Graphen  $W_{\text{kin,max}}(f)$  ist auch bei anderen Materialien gleich, jedoch besitzen diese andere Grenzfrequenzen. Mit  $h = 6,625 \cdot 10^{-34} \text{Js}$  gilt dann für die Energie  $E$  des Lichts  $E = hf$ .

### 5.1.3 Erklärung des lichtelektrischen Effekts

#### 5.1.3.1 Scheinbare Widersprüche

Eine physikalische Erklärung bedeutet, die Ergebnisse in ein Modell (Vorstellungsbild) einzufügen. Beispielmmodelle sind

Licht: Welle

Elektron: Teilchen

Der Photoeffekt beschreibt die Wechselwirkung zwischen Welle und Teilchen. Die wesentlichen Aussagen des Photoeffekts sind

1. Aus einem Metall werden Elektronen durch Licht ausgelöst, dessen Frequenz größer ist als die vom Material abhängige Grenzfrequenz.  
Unterhalb dieser Grenzfrequenz treten keine Elektronen aus, egal wie hoch die Intensität ist.
2. Die vom Licht einer bestimmten Frequenz ausgelösten Photoelektronen besitzen einen bestimmten Höchstwert an kinetischer Energie, der von der Frequenz des Lichtes und nicht von der Intensität abhängt.

zu 1. Licht als Welle:

Die in einer bestimmten Zeit an einer bestimmten Stelle übertragene Energie ist abhängig von der Intensität und damit (dem Quadrat) der Amplitude der Welle. Wird die Intensität bei beliebiger Frequenz erhöht, so steigt die Energiedichte und nach dem Wellenmodell müsste es zu einer Auslösung der Elektronen kommen. So regt Licht als elektromagnetische Welle Elektronen zum Schwingen an. Steigt die Intensität, steigt die Amplitude der Schwingungen, bis das Elektron aus dem Verband gelöst wird.

ABER: Obwohl Energie zur Verfügung steht, werden bei Frequenzen unter  $f_{Gr}$  keine Elektronen ausgelöst.

Diese Tatsache und die Existenz einer Grenzfrequenz lassen sich mit dem Wellenmodell nicht erklären.

zu 2. Nach dem Wellenmodell müssten die Elektronen jeden beliebigen Betrag der kinetischen Energie aufnehmen können, da die Intensität beliebig erhöht werden kann.

ABER: Es gibt einen Höchstbetrag der kinetischen Energie. Das kann nicht an den Elektronen liegen, da Elektronen bei höheren Frequenzen auch höhere Energiebeträge aufweisen.

Im Wellenmodell ist die Existenz eines Höchstbetrags der kinetischen Energie nicht erklärbar.

Eine Intensitätserhöhung erhöht nicht die kinetische Energie der Elektronen sondern nur deren Zahl.

Man spricht auch von einem Dualismus Welle - Korpuskel; das heißt, dass Licht sowohl Wellen- als auch Teilchencharakter hat.

Oberflächlich betrachtet widersprechen sich diese Modelle allerdings.

### 5.1.3.2 Einsteinsche Erklärung des Photoeffekts

Licht einer bestimmten Frequenz  $f$  besteht aus Energieportionen (Quanten) der Größe  $hf$ . Sie können auch als Lichtquanten oder Photonen bezeichnet werden und sind dabei reine Energie. Ihre Energie wird, sofern sie mit einem Elektron in Wechselwirkung treten, komplett aufgenommen.

Eine Erhöhung der Intensität zeigt sich in der Vergrößerung der Zahl der Photonen.

Ein Elektron tritt mit genau einem Photon in Wechselwirkung und absorbiert die Photonenenergie.

### 5.1.4 Aufgaben zum Photoeffekt

Aufgabe 9:

1. Zur Messung der Austrittsarbeit werden einige Alkalimetalle mit dem Licht der Quecksilberdampfampe bestrahlt und die Gegenspannungen gemessen, bei denen gerade der Photostrom Null wird (s. Tabelle 5.2). Welche Werte ergeben sich für das Wirkungsquantum und für die Austrittsarbeit?
2. Berechnen Sie die Grenzwellenlänge beim lichtelektrischen Effekt aus den bekannten Werten für die Austrittsarbeiten bei den verschiedenen Elementen nach Tabelle ??.
3. Licht der Frequenz  $1,3 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$  löst aus einem Metall Elektronen der Maximalenergie  $1,8 \text{ eV}$  aus. Wie groß ist die Austrittsarbeit  $W_A$  für das Metall? Wie groß ist die Frequenz des Lichts, das gerade noch Elektronen auslösen kann?
4. Licht der Wellenlänge  $\lambda = 3,6 \cdot 10^{-7} \text{ m}$  trifft auf Cäsium, für das die Austrittsarbeit  $W_A = 1,94 \text{ eV}$  beträgt. Berechnen Sie die kinetische Energie und die Geschwindigkeit der schnellsten Photoelektronen.
5. Welche Höhe muss ein Körper der Masse  $m = 10^{-8}$  (Sandkorn) durchfallen, um eine kinetische Energie zu erhalten, die gleich der Energie eines Lichtquants der Frequenz  $f = 5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$  ist?

6. Wie groß sind die Quanten einer Radiowelle ( $\lambda = 200\text{m}$ ), von Infrarotstrahlung ( $\lambda = 10^{-6}\text{m}$ ) und von Röntgenstrahlung ( $\lambda = 10^{-9}\text{m}$ )?
7. Natriumatome emittieren oder absorbieren Strahlung der Wellenlänge  $\lambda = 5,9 \cdot 10^{-7}\text{m}$ . Berechnen Sie die Energie der Photonen.

Element	493nm	405nm	$W_A$	Element	$W_A$	$\lambda_{Gr}$
Li	0,06V	0,60V	2,44eV	Cu	4,48eV	270nm
Na	0,24V	0,78V	4,11eV	Ag	4,70eV	264nm
K	0,27V	0,81V	2,20eV	Zn	4,27eV	290nm
Rb	0,39V	0,93V	2,05eV	Al	4,20eV	295nm
Cs	0,58V	1,12V	1,83eV	Si	3,59eV	345nm
				Ge	4,62eV	268nm

Tabelle 5.2: Anzulegende Gegenspannung nach Frequenz und Metall

- zu 1) Es ist  $h = \frac{\Delta W}{\Delta f}$ , in dieser Tabelle ist der Wert  $h = 6,53449 \cdot 10^{-34}\text{Js}$  konstant. Es gilt  $eU = hf - W_A$ . Die übrigen Lösungen sind der Tabelle 5.2 zu entnehmen.
- zu 2) Da die Austrittsarbeit gegen ist, kann die Wellenlänge über  $f = \frac{W_A}{h} = \frac{c}{\lambda}$  berechnet werden. Die Lösungen sind in Tabelle 5.2 zu finden.
- zu 3) Das Licht liefert eine Gesamtenergie von  $hf$ , die für die kinetische Energie der Elektronen  $W_{\text{kin,max}}$  und die Austrittsarbeit  $W_A$  verwendet wird. Es gilt  $W_{\text{kin,max}} = hf - W_A$ . Dann ergibt sich eine Austrittsarbeit von  $W_A = hf - 1,8 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}\text{J} = 5,7325 \cdot 10^{-19}\text{J} = 3,58\text{eV}$ . Dann ist die Grenzfrequenz  $f = \frac{W_A}{h} = 8,65 \cdot 10^{14}\text{Hz}$ .
- zu 4)  $W_{\text{kin,max}} = h \cdot \frac{c}{\lambda} - 1,94\text{eV} = 2,42\text{J} = 1,51\text{eV}$  und nach  $W_{\text{kin,max}} = \frac{1}{2}mv^2$  ist  $v = 7,28 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .
- zu 5) Die Energie des Photons ist  $E = hf = 3,3125 \cdot 10^{-19}\text{J} = 2,07\text{eV}$ , die potentielle Energie ist  $W = m \cdot g \cdot h$ , dann ist  $h = 3,376 \cdot 10^{-12}\text{m}$ .
- zu 6) Radiowellen:  $E = 10^{-27}\text{J} = 6,2 \cdot 10^{-19}\text{eV}$ ; Infrarotstrahlung:  $E = 2 \cdot 10^{-19}\text{J} = 1,24\text{eV}$ ; Röntgenstrahlung:  $E = 2 \cdot 10^{-16}\text{J} = 1240\text{eV}$ .
- zu 7)  $E = 3,368 \cdot 10^{-19}\text{J} = 2,11\text{eV}$ .

## 5.2 Compton-Effekt

### 5.2.1 Versuche bezüglich des Effekts

#### 5.2.1.1 Widerspruch zum Wellenmodell

Da nach dem Photoeffekt Licht auch Teilcheneigenschaften hat, muss man Photonen eine Masse  $m$  und einen Impuls  $p$  zuordnen können (Impuls  $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ , Impulserhaltungssatz

$$\sum p_{\text{vor dem Stoß}} = \sum p_{\text{nach dem Stoß}}.$$

1922 weist A. H. COMPTON die Teilcheneigenschaft von Photonen nach.

**Versuch 1:** Röntgenstrahlung (monochromatisch) trifft auf einen Graphitblock. Graphit ist kein Metall, verfügt aber über Elektronenleitung. Im Wellenmodell ließe sich erwarten, dass das Licht gestreut und damit die Intensität, je größer der Winkel zu dem eintreffenden Strahl ist, geringer wird, die Frequenz jedoch gleich bleibt.

Erwartung:

1. In Richtung des einfallenden Lichtes ist eine Welle hoher Intensität zu erwarten.
2. In anderen Richtungen sollten Wellen geringerer Intensität festzustellen sein.

Die Wellenlänge bliebe jedoch gleich.

**Erklärung** im Wellenmodell:

Die Elektronen schwingen in der Frequenz der Röntgenstrahlung und geben die Strahlung in derselben Frequenz nach allen Seiten ab, es findet eine Streuung statt.

Aber im Streulicht lassen sich auch Wellen längerer Wellenlänge finden, womit dies ein Widerspruch zum Wellenmodell ist.

### 5.2.1.2 Nachweis des Compton-Effekts

**Versuch 2:** Im Röntgengerät trifft die (durch Kupferfolie abgeschwächte) Strahlung auf eine Aluminiumplatte. Das Geiger-Müller-Zählrohr misst (ebenfalls abgeschwächt) in zwei Positionen die Impulse pro Sekunde.

**Stelle 1:** Kupferfolie im einfallenden Strahl:  $4,83 \frac{\text{Impulse}}{\text{s}}$

**Stelle 2:** Kupferfolie im gestreuten Strahl:  $2,41 \frac{\text{Impulse}}{\text{s}}$

Daraus folgt, dass die Filterwirkung der Kupferfolie in der zweiten Einstellung stärker ist als die an der ersten Stelle.

Da Photonen hoher Frequenz (Energie) von Kupfer weniger „rausgefiltert“ werden als solche mit geringerer Frequenz, bedeutet das, dass im Streulicht ein hoher Anteil von Photonen geringerer Frequenz als im eingestrahltten Röntgenlicht sein muss.

Beim Streuvorgang im Aluminium ändert sich die Frequenz, sie wird kleiner und damit die Wellenlänge größer. Dies dient als Nachweis des COMPTON-Effekts.

## 5.2.2 Mathematische Beschreibung

### 5.2.2.1 Photonen und Impuls

Größere Energieportionen durchschlagen die Kupferfolie leichter.

Die Änderung der Wellenlängen im Streulicht lässt sich nur erklären, wenn man die Photonen als Teilchen betrachtet.

Für Teilchen mit Geschwindigkeiten in der Nähe der Lichtgeschwindigkeit  $c$  gilt  $E = mc^2$ . Die Energie eines Photons ist dabei  $W_{Ph} = h \cdot f$ , also ist  $mc^2 = h f$ , dann ist der Impuls

$p$  eines Photons  $p = m c = \frac{h f}{c} = \frac{h}{\lambda}$ . Für die Masse gilt  $m = \frac{h f}{c^2}$ .

Also werden die wesentlichen Teilcheneigenschaften eines Photons nur durch seine Frequenz bestimmt.

Allgemein gilt nach EINSTEIN:

$m_0$ : Ruhemasse eines Teilchens ( $v = 0$ )

$m$ : dynamische Masse

Es gilt  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ .

$\Rightarrow W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \wedge p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ . Für ein Photon ist  $v = c$  und damit aus  $m c^2 = h f$

$p = \frac{W}{c^2} \cdot v = \frac{W}{c}$ . Der Ausdruck  $W^2 - p^2 c^2$  lässt sich vereinfachen:

$$W^2 - p^2 c^2 = \frac{m_0^2 c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \left( \frac{m_0^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) c^2 = m_0^2 c^2 \left( \frac{c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) = m_0^2 c^2 \frac{c^2 - v^2}{\frac{c^2 - v^2}{c^2}} = m_0^2 c^4$$

$W^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4$ , für ein Photon gilt dann:

$m_0^2 c^4 = h^2 f^2 - \frac{h^2 f^2}{c^2} c^2 = 0$ , also ist die Ruhemasse eines Photons Null.

### Zusammenfassung:

Photonen besitzen Teilcheneigenschaften:

$W_{\text{Ph}} = h \cdot f \wedge p_{\text{Ph}} = \frac{h \cdot f}{c} = \frac{h}{\lambda} \wedge m_{\text{Ph}} = \frac{h \cdot f}{c^2}$ .

Die Ruhemasse  $m_0$  ist Null, die Geschwindigkeit  $v_{\text{Ph}} = c$ .

### 5.2.2.2 Wellenlängenänderung

Dass die Wellenlänge  $\lambda$  im Streulicht größer ist, deutet auf eine Energieabnahme des eingestrahnten Lichts hin. Nach COMPTON stoßen die Photonen mit ruhenden Elektronen zusammen.

Impuls vor dem Stoß:  $\vec{p} + \vec{0}, \vec{0} = \vec{p}_e$

Impuls nach dem Stoß:  $\vec{p}' = \vec{p}'_e + \vec{p}'_{\text{Ph}}$

Massenvergleich:  $m_{\text{Ph}}(\text{Röntgenlicht}) = \frac{h \cdot 10^{20}}{c^2} = 7,37 \cdot 10^{-31} \text{kg}$  und  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{kg}$ .

Es gelten der Impuls- und der Energiesatz:

$$(5.1) \quad \vec{p}_{\text{Ph}} + \vec{p}_e = \vec{p}'_{\text{Ph}} + \vec{p}'_e$$

$$(5.2) \quad W_{\text{Ph}} + W_{0e} = W'_{\text{Ph}} + W'_e$$

$m_{0e}$ : Ruhemasse des Elektrons

$m_e$ : dynamische Masse des Elektrons. Energie des Elektrons vor dem Stoß:  $W_{0e} = m_{0e} c^2$ , also

$W'_e = m_e c^2$  Energie des Elektrons nach dem Stoß.

$W_{\text{Ph}} = h f$  Energie des Photons vor dem Stoß,  $W'_{\text{Ph}} = h f'$  Energie des Photons nach dem Stoß.

Dann ist nach (5.2) und nach dem Cosinussatz für die Vektoraddition der Impulse mit  $\vec{p}' = \vec{p}'_{\text{Ph}}$  und für  $m_e c^2 = W'_e$

$$(5.3) \quad hf + m_{0e}c^2 = hf' + m_e c^2$$

$$(5.4) \quad \vec{p}_e'^2 = p_{\text{Ph}}^2 + p_{\text{Ph}}'^2 - 2p_{\text{Ph}}p_{\text{Ph}}' \cos \varphi$$

$$(5.5) \quad W_e'^2 - p_e'^2 c^2 = m_{0e}^2 c^4$$

Einsetzen: (5.4) in (5.5), (5.3) in (5.5):

$$\begin{aligned} & (hf + m_{0e}c^2 - hf')^2 - (\vec{p}_e'^2 = p_{\text{Ph}}^2 + p_{\text{Ph}}'^2 - 2p_{\text{Ph}}p_{\text{Ph}}' \cos \varphi)c^2 = m_{0e}^2 c^4 \\ (h(f - f') + m_{0e}c^2)^2 - \left( \left( \frac{hf}{c} \right)^2 + \left( \frac{hf'}{c} \right)^2 - 2 \left( \frac{hf}{c} \right) \left( \frac{hf'}{c} \right) \cos \varphi \right) c^2 &= m_{0e}^2 c^4 \\ h^2(f - f')^2 + 2h(f - f')m_{0e}c^2 + m_{0e}^2 c^4 - h^2(f^2 + f'^2) + 2h^2 f f' \cos \varphi &= m_{0e}^2 c^4 \\ h^2 f^2 - 2h^2 f f' + h^2 f'^2 + 2hm_{0e}c^2(f - f') - h^2 f^2 - h^2 f'^2 + 2h^2 f f' \cos \varphi &= 0 \\ 2h^2 f f' \cos \varphi - 2h^2 f f' + 2hm_{0e}c^2(f - f') &= 0 \\ h f f' (\cos \varphi - 1) + (f - f')m_{0e}c^2 &= 0 \\ \frac{f - f'}{f f'} &= \frac{h}{m_{0e}c^2} (1 - \cos \varphi) \\ (5.6) \quad \frac{1}{f'} - \frac{1}{f} &= \frac{h}{m_{0e}c^2} (1 - \cos \varphi) \end{aligned}$$

Nach (5.6) gilt für die Wellenlängenänderung  $\Delta\lambda = \frac{h}{m_{0e}c}(1 - \cos \varphi)$ .

Die Wellenlängenänderung hängt also nur vom Streuwinkel  $\varphi$  ab, daher wurden bei dem Versuch zum Compton-Effekt möglichst große Winkel gemessen.

Für  $\varphi = 90^\circ$  gilt  $\lambda = \frac{h}{m_{0e}c}$ , dies ist die Compton-Wellenlänge  $\lambda_C \approx 2,4 \cdot 10^{-12}\text{m}$ .

### 5.2.2.3 Sichtbares Licht

Tritt der Compton-Effekt auch bei sichtbarem Licht auf?

Die Frequenz von Röntgenlicht beträgt etwa  $10^{20}\text{Hz}$ , damit ist die Masse eines solchen Photons  $m_{\text{Ph}} \approx 7,3 \cdot 10^{-31}\text{kg}$ , wohingegen die Masse eines Elektrons  $9,1 \cdot 10^{-31}\text{kg}$  beträgt. Wird sichtbares Licht verwendet mit  $f \approx 10^{14}\text{Hz}$ , so ist deren Masse etwa  $7,3 \cdot 10^{-37}\text{kg}$ .

Für sichtbares Licht ist ein Elektron 1000000mal so groß (schwer) und das Photon wird reflektiert. Dann behalten die Photonen ihre Frequenz, an die Elektronen wird keine Energie abgegeben.

## 5.2.3 Zusammenführung der Modellvorstellungen

### 5.2.3.1 Mathematisches Niveau

$$W_{\text{Ph}} = hf, \quad m_{\text{Ph}} = \frac{hf}{c^2}, \quad p_{\text{Ph}} = \frac{hf}{c}$$

Welleneigenschaften ( $f, h$ ) bestimmen die Teilcheneigenschaften!

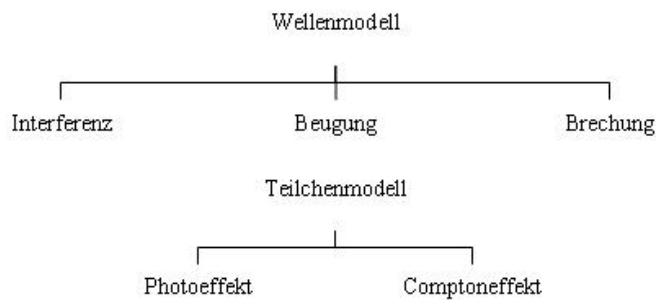


Abbildung 5.1: Übersicht der Modelle

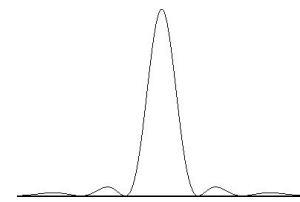


Abbildung 5.2: Intensitätsverteilung

### 5.2.3.2 Intensitätsverteilung in einem Interferenzmuster

TAYLOR 1909: Interferenz an einer Nadel (Versuch ist auch analog mit einem Haar durchführbar). Die Intensitätsverteilung ist in [Abbildung 5.2](#) dargestellt.

Taylor hat das Licht auf einen Film fallen lassen. Fällt Licht auf einen Film, so findet ein innerer Photoeffekt statt. Das  $Ag^+Br^-$  befindet sich in Gelatine und ist eine Ionenbindung. Wird Licht eingestrahlt, so entsteht reines Silber  $Ag$  und Brom. Metallisches Silber ist schwarz und damit in Form von Körnern sichtbar. Maxima befinden sich an Orten hoher Photonendichte, dort ist auch die Dichte geschwärzter Körner groß. Minima hingegen befinden sich an Orten geringer Photonendichte mit einer geringen Dichte geschwärzter Körner.

Die Photonendichte ist proportional zur Intensität ( $\hat{E}^2$ ). Wenn die Photonen in einer Lichtquelle erzeugt werden und durch den Raum wandern, um in einem Interferenzbild registriert zu werden, dann könnte dieses Bild auch durch eine Wechselwirkung zwischen den Photonen entstehen.

Um diese These zu widerlegen, führte TAYLOR seinen Versuch mit einer so geringen Intensität durch, dass jeweils nur **ein** Photon in der Versuchsanordnung war. Dazu waren etwa 2000 Stunden Belichtungszeit notwendig.

Es ergab sich ein klares Interferenzbild, wie es auch bei hoher Intensität beobachtet wurde. Dies bestätigt die Annahme, dass sich die Photonen nicht gegenseitig beeinflussen. Die Intensitätsverteilung ist vom Wert der Intensität unabhängig.

Beim Aufbau eines Interferenzbildes aus einzelnen, nacheinander registrierten Photonen sind die Photonen in derselben Weise verteilt wie bei einem mit großer Intensität erzeugten Interferenzbild.

Das Problem, wo jetzt ein Photon aufzufinden ist, löst die Wellenoptik:

Eine hohe Intensität entspricht einer großen Wahrscheinlichkeit  $P$ , ein Photon anzutreffen.

Da man in großen Volumina mit höherer Wahrscheinlichkeit irgendein Photon antrifft als in kleinen, ist es sinnvoll, die Wahrscheinlichkeitsaussagen auf Raumbereiche zu beziehen:

Die Wahrscheinlichkeit  $P$ , ein Photon in einem Raumbereich  $\Delta V$  zu registrieren, ist proportional zur Intensität der Strahlung in diesem Raumbereich.

## 5.3 Aufgaben - Photonen

### 5.3.1 Allgemeine Definition einer Kraft

$$F = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt} \cdot \vec{v} = m\vec{a} + \dot{m}\vec{v}$$

### 5.3.2 Aufgaben

#### 1. Versuch zum Nachweis der Existenz der Photonenmasse

Ein Photon der Frequenz  $f$  „fällt“ im oberflächennahen Gravitationsfeld der Erde  $s=20\text{m}$  senkrecht nach unten. Berechnen Sie unter der vereinfachenden Annahme, dass die Photonenmasse während des Falls konstant bleibt, die prozentuale Änderung der Frequenz des Photons am Ende der Fallstrecke!

Das Photon besitzt eine Energie  $h \cdot f_v$  vor und  $h \cdot f_d$  nach dem Sturz. Die zuvor vorhandene potentielle Energie wird also in die Frequenzänderung umgesetzt. Es ist  $W_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot s = \frac{h \cdot f_v}{c^2} \cdot g \cdot s$ , also  $h \cdot f_d = h \cdot f_v + \frac{h \cdot f_v}{c^2} \cdot g \cdot s \Leftrightarrow f_d = f_v + 2,18 \cdot 10^{-15} f_v$ . Damit vergrößert sich die Frequenz um  $2,18 \cdot 10^{-13}\%$ .

#### 2. Versuch zur Bestätigung des Photonenimpulses

Ein Physiker möchte zum Nachweis des Photonenimpulses die Kraft messen, die das Licht eines Lasers auf eine Spiegelfläche ausübt. Der Laser strahlt Licht der Leistung  $P=100\text{W}$  und der Frequenz  $f = 4,7 \cdot 10^{14}\text{Hz}$  ab, das senkrecht auf den ideal reflektierenden Spiegel trifft.

- Wie viele Photonen werden in einer Sekunde abgestrahlt?
- Welchen Impuls besitzt ein Photon?
- Berechnen Sie die Impulsänderung  $\Delta p$  eines Photons bei der Reflexion am Spiegel!
- Berechnen Sie die Kraft, die das Laserlicht auf den Spiegel ausübt!

zu a) Die Energie eines Photons ist  $W = h \cdot f = 3,114 \cdot 10^{-19}\text{J}$ , pro Sekunde wird eine Energie von  $W_P = 100\text{J}$  abgestrahlt. Da  $n \cdot W = W_P$  ist, treffen  $n = 3,211 \cdot 10^{20}$  Photonen pro Sekunde auf den Spiegel.

zu b)  $p = \frac{hf}{c} = 1,038 \cdot 10^{-27}\text{Ns}$

zu c)  $\Delta p = 2p = 2,076 \cdot 10^{-27}\text{Ns}$ , die vektorielle Subtraktion von  $\vec{p}'$  von  $\vec{p}$  liefert einen Vektor, der die Orientierung von  $\vec{p}$  und den Betrag von  $|\vec{p}'| + |\vec{p}| = 2|\vec{p}|$  hat, also  $\Delta\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}' = 2\vec{p}$ .

zu d) Eine Kraft (und damit auch eine Beschleunigung) ist durch die Richtungsänderung erkennbar. Ähnlich wie in c) wird die Beschleunigung berechnet:  $\vec{a} = \vec{v} - \vec{v}' = 2\vec{v}$  und  $|\vec{a}| = 6 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ . Dann ist  $F = \frac{hf}{c^2} \cdot |\vec{a}| = 2,076 \cdot 10^{-27} \text{N}$ .

Die Überlegungen sind nur dann gültig, wenn sie sich auf eine Sekunde beziehen! Die Gesamtkraft pro Sekunde ist dann  $F_{\text{ges}} = n \cdot F = 6,64 \cdot 10^{-7} \text{N}$ .

$$F = \frac{m\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2,076 \cdot 10^{-27} \text{Ns}}{1 \text{s}}$$

### 3. Laserlicht trifft auf ein Spiegelpendel

Ein ideal reflektierendes Blattgoldstück der Masse  $m=15\mu\text{g}$  hängt an einem Faden der Länge  $l=2,50\text{cm}$ , dessen Masse im Weiteren unberücksichtigt bleiben soll. Es wird von einem monochromatischen Laserblitz getroffen und entsprechend nebenstehender Skizze um die Strecke  $s$  aus seiner Ruhelage ausgelenkt. Berechnen Sie  $s$  unter Verwendung der Näherung  $d \ll l$ , wenn die Gesamtenergie des auftreffenden Blitzes  $0,1\text{J}$  beträgt!

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgd \Leftrightarrow d = \frac{m^2v^2}{2gm^2}, \text{ mit } p = mv = \frac{hf}{c} = \frac{W}{c} \text{ ist } d = \frac{2W^2}{c^2m^2g}. \text{ Nach dem Höhensatz ist } s^2 = d(2l - d) \approx 2ld, \text{ also ist } s = 2,2 \cdot 10^{-3} \text{m}.$$

## 5.4 Welleneigenschaften von Elektronen

Licht: Welle und Teilchen

Elektronen: nur Teilchen?

**Frage:** Kann man Teilchen, z. B. Elektronen, Welleneigenschaften zuordnen?

Licht:  $p = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$ ,  $W = h \cdot f$ ,  $m_0 = 0$ ,  $m_{\text{Ph}} = \frac{hf}{c^2}$ .

Elektron:  $p = mv$ ,  $m_0 \neq 0$ ,  $W = \frac{m_0}{2}v^2$ .

Konsequent weitergedacht hat Louis Victor (Prince) DE BROGLIE 1923:

1. Hypothese: Jedes Teilchen breitet sich als Welle mit der Wellenlänge  $\lambda = \frac{h}{p}$  aus, wobei  $p$  der Teilchenimpuls ist.
2. Hypothese: Für die Gesamtenergie  $W$  eines Teilchens und die zugeordnete Frequenz  $f$  gilt  $W = h \cdot f$ .

### 5.4.1 Versuchsapparatur

Eine Versuchsapparatur, um die Vermutungen zu belegen, ist in Abbildung ?? dargestellt. 1927 führten DAVISSON und GERMER diesen Versuch durch.

Graphit besteht aus vielen einzelnen ungeordneten Mikrokristallen. Auf dem Schirm ist anschließend ein Interferenzmuster mit hellen und dunklen Ringen um einen hellen zentralen Punkt erkennbar.

**Erklärung:** Bragg-Reflexion; die hellen Streifen (Maxima) sind bei den Glanzwinkeln  $\vartheta$  zu erkennen. In dieser Unordnung gibt es genügend Kristalle, die den Strahl um  $2\vartheta$  ablenken, also die Glanzwinkelbedingung erfüllen.

Die Glanzwinkelbedingung ist  $\lambda = 2d \sin \vartheta$ . Folgende Werte wurden bei Durchführung des Versuches gemessen:

$$R_1=1,4\text{cm} \quad R_2=2,5\text{cm} \quad L=13,4\text{cm}$$

Die Gitterabstände betragen  $d_1 = 123\text{pm}$  und  $d_2=213\text{pm}$ . Daraus können der Glanzwinkel und die Wellenlänge bestimmt werden. Es ist  $\tan \vartheta_1 = \frac{R_1}{L} \Leftrightarrow \vartheta_1 = 5,96^\circ$  und damit  $\lambda_1 = 2 \cdot 123\text{pm} \cdot \sin 5,96^\circ = 25,56\text{pm}$ . Also ist  $\tan \vartheta_2 = \frac{R_2}{L} \Leftrightarrow \vartheta_2 = 10,57^\circ$  und damit  $\lambda_2 = 2 \cdot 213\text{pm} \cdot \sin 10,57^\circ = 78,13\text{pm}$ .

### 5.4.2 Berechnung der Wellenlänge nach de Broglie

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot v} \wedge \frac{m}{2} v^2 = eU \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{\sqrt{m}} \sqrt{\frac{1}{2eU}} = \frac{h}{\sqrt{2emU}}. \text{ Mit } U = 4000\text{V} \text{ ist } \lambda = 19,4\text{pm}.$$

Eine Erhöhung der Spannung hat eine Verkleinerung der Radien zur Folge, denn die Wellenlänge und damit auch der Glanzwinkel werden geringer, also sinkt der Abstand zwischen Minima und Maxima.

Wenn ein Mensch der Masse  $m = 70\text{kg}$  in einem Auto mit  $v = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 27,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  fährt, beträgt seine Wellenlänge  $\lambda = 3,4077 \cdot 10^{-37}\text{m}$ .

### 5.4.3 Nachweis von Jönsson

Ein Doppelspalt hat die Breite  $0,5\mu\text{m}$  und den Spaltabstand  $d = 2\mu\text{m} \gg \lambda_e$ . Der Interferenzversuch mit einem Doppelspalt wird mit Elektronen durchgeführt. Das Interferenzmuster wird bei  $10^6$ facher Vergrößerung im Elektronenmikroskop betrachtet. Es ergeben sich unterschiedlich große Intensitäten, abhängig davon, ob nur ein Spalt oder zwei Spalte geöffnet sind.

Es ist also falsch anzunehmen, dass ein Elektron entweder links oder rechts durch den Spalt geht. Das Elektron müsste „wissen“, ob beide Spalte offen sind oder nicht.

Sind beide Spalte offen, so gibt es Gebiete (Minima), wo keine Elektronen auftreffen, obwohl dort nach klassischer Sichtweise sehr viele Elektronen auftreffen müssten.

Das Verhalten von Elektronen wird nur dann vollständig beschrieben, wenn man zur Ausbreitung Wellen- und für die Wechselwirkung Teilcheneigenschaften verwendet.

#### 5.4.3.1 Aufgabe

Bei einer angelegten Beschleunigungsspannung von  $U = 54,7\text{kV}$  und einem Schirmabstand von  $l = 0,4\text{m}$  und einem Spaltabstand  $d = 2\mu\text{m}$  wird ein Interferenzmuster beobachtet. Die Wellenlänge der Elektronen beträgt dann  $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2emU}} = 5,25\text{pm}$ . Die

Abstände der ersten Maxima auf dem Schirm werden bestimmt, indem die Gleichung  $d \approx \frac{k\lambda}{d} = 1,05 \cdot 10^{-6} \text{m} = 1,05 \mu\text{m}$  verwendet wird.

## 5.5 Heisenberg'sche Unschärferelation

### 5.5.1 Aufgaben

Informationen zu dieser Aufgabe sind dem Arbeitsblatt zu entnehmen.

- a) Zeigen Sie, dass mit den Bezeichnungen der Skizze für die Materiewellenlänge  $\lambda$  der Elektronen gilt:

$$\lambda = \frac{\Delta x \cdot \overline{AB}}{2L}$$

- b) Warum müssen die Elektronen nach dem Durchtritt durch den Spalt zusätzlich noch zu  $v_y$  Geschwindigkeitskomponenten  $v_x$  in die positive und negative x-Richtung besitzen?

- c) Zeigen Sie, dass die Gesamtlänge  $\Delta v_x$  des Intervalls, in dem diese Geschwindigkeitskomponenten liegen, sich folgendermaßen abschätzen lässt:

$$\Delta v_x \geq \frac{\overline{AB} \cdot v_y}{L}$$

- d) Zeigen Sie unter Verwendung aller bisheriger Ergebnisse, dass

$$\Delta v_x \cdot \Delta x \geq \frac{2h}{m}!$$

- e) Erläutern Sie den physikalischen Gehalt der Beziehung aus Aufgabenteil d unter Beachtung des Heisenberg'schen Denkansatzes!

zu a) Die Wellenlänge wird über  $\tan \alpha \approx \sin \alpha$  berechnet. Dann ist  $\lambda = \frac{\Delta x \cdot \overline{AB}}{L \cdot 2}$ . Für Minima gilt  $k \cdot \lambda = \frac{\Delta x \cdot \overline{AB}}{L \cdot 2}$  und für Maxima  $(k + \frac{1}{2})\lambda = \Delta x \cdot \overline{AB} / L \cdot 2$  mit  $k \in \mathbb{N}$ .

zu b) Elektronen werden abgelenkt, da sie auch Welleneigenschaften besitzen. Es existiert eine Wahrscheinlichkeit P, dass sie sich zu einer bestimmten Zeit an einem bestimmten Ort aufhalten. An den Stellen der Intensitätsmaxima ist P am größten. Wellen werden gebeugt.

zu c) Aus geometrischen Überlegungen ergibt sich  $\tan \alpha = \frac{\overline{AB}}{2L} = \frac{v_x}{v_y} \Leftrightarrow v_x = \frac{\overline{AB} \cdot v_y}{2L}$ . Dabei ist  $\Delta v_x = 2v_x$  (denn der Betrag der Geschwindigkeitskomponenten in x-Richtung ist gleich, ihre Orientierung aber verschieden), also gilt  $\Delta v_x = \frac{\overline{AB} v_y}{L}$ . Der physikalische Hintergrund ergibt sich aus dem Unabhängigkeitsprinzip:  $v_y = \frac{L}{t}$  und  $v_x = \frac{|\overline{AB}|}{2t}$ ; mit  $\Delta v_x = 2v_x$ . Dann ist  $\Delta v_x = \frac{\overline{AB} v_y}{L}$ . Da auch über die Punkte A und B hinaus Elektronen auftreffen, muss  $\Delta v_x \geq \frac{|\overline{AB}| v_y}{L}$  sein.

zu d)  $\Delta p_x = m \cdot \Delta v_x$ . Da  $p = \frac{h}{\lambda}$ , ist  $\lambda = \frac{h}{m \cdot v}$ , also ist  $v_y = \frac{h}{m \cdot \lambda}$ . Dies kann in  $\Delta v_x \geq \frac{|\overline{AB}| v_y}{L}$  eingesetzt werden:  $\Delta v_x \geq \frac{|\overline{AB}|}{L} \cdot \frac{h}{m \cdot \lambda}$ . Nach  $\lambda = \Delta x \cdot \overline{AB} / L \cdot 2$  ist dann  $\Delta v_x \cdot \Delta x \geq \frac{2h}{m}$

zu e) Das Produkt aus der Geschwindigkeitskomponente in x-Richtung und dem Spaltabstand ist konstant. Damit ist die Geschwindigkeit antiproportional zur Spaltbreite  $\Delta x$  (bei Gleichheit, ist aber größer gleich). Je kleiner die Spaltbreite, umso größer die Geschwindigkeitskomponente in x-Richtung und umso größer die Beugungsbildbreite.

## 5.5.2 Definition

### 5.5.2.1 Impulsunschärfe

$m\Delta v_x \Delta x \geq 2h$  und damit  $\Delta p_x \Delta x \geq 2h$ .

### 5.5.2.2 Heisenberg'sche Unschärferelation

Es ist grundsätzlich unmöglich, den Ort *und* die Geschwindigkeit eines Mikroteilchens gleichzeitig absolut genau zu bestimmen.

$$\Delta p_x \Delta x \geq \frac{h}{2\pi} (= \hbar)$$

Je genauer man die eine Größe bestimmt, desto größer wird der Bereich über den sich die andere Größe erstrecken kann.

# 6 Atome - Hülle und Kern

## 6.1 Emissionsspektrum

Das Sonnenlicht sowie Glühlicht emittieren ein nahezu kontinuierliches Spektrum, ein leuchtendes Atomgas emittiert hingegen ein Linienspektrum.

Dies ist mit  $E = h \cdot f$  erklärbar, da ein Element nur ganz bestimmte Energiequanten abstrahlt.

### 6.1.1 Wasserstoff

In einer BALMER-Lampe werden Wasserstoffatome zum Leuchten angeregt. Das emittierte Licht wird mit einem Gitter spektral zerlegt. Es ergeben sich die in Tabelle 6.1 aufgeführten Werte.

Farbe	Linie	$\lambda$ [nm]	f [Hz]
violett 1	H $_{\alpha}$	656	$4,5 \cdot 10^{14}$
violett 2	H $_{\beta}$	486	$6,173 \cdot 10^{14}$
blau	H $_{\gamma}$	434	$6,912 \cdot 10^{14}$
rot	H $_{\delta}$	410	$7,317 \cdot 10^{14}$

Abbildung 6.1: Wasserstoffspektrum

### 6.1.2 Balmer-Formel

1884 entdeckt Johann Jacob BALMER eine Regelmäßigkeit (6.1)

$$(6.1) \quad f = C \cdot \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{m^2} \right)$$

mit  $C = 3,288 \cdot 10^{15}$ Hz und  $m = 3, 4, 5, 6, \dots$ . BALMER hatte bereits die richtige Vermutung, dass diese Formel nur ein Spezialfall einer allgemeinen Gleichung sei, die nicht nur für Wasserstoff gelte. Allerdings blieb  $m$  zunächst ohne physikalische Interpretation.

#### 6.1.2.1 Linienspektrum

Die Emission von Licht eines Gases in diskreten Linien bedeutet, dass die Gasatome nur bestimmte, für das Gas charakteristische Energieportionen abgeben können (**quantenhafte Emission**).

### 6.1.3 Aufgaben

Seite 403, Metzler Physik.

1. a) Frequenz  $m = 7 \Leftrightarrow f = 7,55 \cdot 10^{14} \text{Hz}$  und  $m = 8 \Leftrightarrow f = 7,7 \cdot 10^{14} \text{Hz}$   
 b) Die Grenzfrequenz für Wasserstoff ist  $f_{\text{Grenz}} = \lim_{m \rightarrow \infty} C \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{m^2} \right) = 8,22 \cdot 10^{14} \text{Hz} \Leftrightarrow \lambda_{\text{Grenz}} = 365 \text{nm}$
2. Die größte Wellenlänge des Wasserstoffs ist  $\lambda = 657 \text{nm}$  mit  $m = 3$ , da  $m^2 \sim \frac{1}{\lambda}$ . Für  $m \leq 2$  ist  $f$  nicht positiv, sodass sich ein maximaler Wert der Wellenlänge für  $m = 3$  ergibt. Dieser liegt jedoch nicht im IR-Bereich.
3. Wird für  $1 \leq a \leq 5$  das jeweilige  $m$  nach  $\frac{c}{\lambda_a} = C \cdot \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{m^2} \right)$  errechnet, so ist  $m \in \mathbb{Q}$ . Wird  $m$  mit 2 multipliziert, so ist  $6 \leq m \leq 10$ .  
 Also ist die Formel  $C \cdot \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{\left(\frac{m}{2}\right)^2} \right) = 4C \cdot \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{m^2} \right)$  und  $m \in \mathbb{N}$ .

## 6.2 Franck-Hertz-Versuch

$U_1$ : Spannung von der Kathode bis zum ersten Gitter

$U_2$ : Spannung vom ersten bis zum zweiten Gitter (verstärkt)

$U_3$ : Bremsspannung

### 6.2.1 Beobachtungen

Ab einer Beschleunigungsspannung  $U_1+U_2=U_b$  von ca. 20V entsteht der erste Leuchtring. Wird  $U_b$  erhöht, wandert der Ring zum Gitter, es entsteht ein zweiter Ring, dann ein dritter.

### 6.2.2 Erklärung

Elektronen werden durch  $U_b$  beschleunigt und stoßen auf Neon-Atome. Ab ca. 20V ist die kinetische Energie der Elektronen so groß genug, um die Neon-Atome unelastisch zu stoßen, d.h. die Elektronen geben ihre Energie an Neon ab.

Der zweite bzw. dritte Ring entsteht, wenn die Elektronen nach dem ersten bzw. zweiten Stoß noch einmal beschleunigt werden und dabei wieder genügend Energie für einen weiteren Stoß aufnehmen können.

### 6.2.3 Quantenhafte Absorption - Messwerte

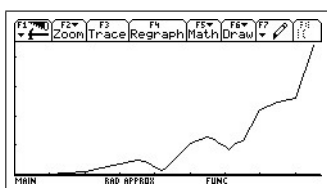


Abbildung 6.2: Messwerte: FRANCK-HERTZ-Versuch

Auf Abbildung 6.2 ist ein  $U_b$ - $I_a$ -Diagramm mit drei Hoch- und zwei Tiefpunkten erkennbar.

Hochpunkt 1: Elektronen stoßen mit Neon

Tiefpunkt: (fast) alle Elektronen haben gestoßen

Hochpunkt 2: erste Elektronen stoßen zum zweiten Mal

Die Hoch- und die Tiefpunkte liegen genau 20V auseinander. Das bedeutet, dass Neon Energie nur in Portionen von 20eV aufnehmen kann. Man spricht von einer quantenhaften Absorption.

## 6.3 Entwicklung des heutigen Atommodells

### 6.3.1 Kurze Geschichte

Details sind dem Arbeitsblatt zu entnehmen. Namen wie LEUKIPP, DEMOKRIT, ARISTOTELES, DESCARTES, LEIBNIZ, NEWTON, DALTON, BROWN, BOYLE, MARIOTTE, AMONTONS und GAY-LUSSAC spielen dabei eine Rolle.

### 6.3.2 Lenard-Versuch

Philip LENARD führte 1894 einen Versuch zur Ermittlung des Aufbaus der Atome durch.

#### 6.3.2.1 Aufbau

Der Aufbau sieht folgendermaßen aus: Der Szintillationsschirm befindet sich hinter der Aluminiumschicht (wahlweise kann auch Gold verwendet werden), Elektronen durchqueren also diese Schicht.

#### 6.3.2.2 Beobachtung

Atome werden durch das 40kV-Feld ionisiert.

Die positiven Ionen werden stark zur Kathode beschleunigt und schlagen dort Elektronen aus, die zum Schirm beschleunigt werden und dort Lichtblitze erzeugen.

#### 6.3.2.3 Erklärung

Damit sind selbst 10000 Aluminiumatome kein Hindernis für die Elektronen. Ein Atom kann also nicht wie eine homogen mit Masse gefüllte Kugel aufgebaut sein. Der größte Teil des Raumes, den Atome beanspruchen, ist leer.

### 6.3.3 Rutherfords Modell

1911 führte Ernest RUTHERFORD folgenden Versuch durch. Ermöglicht wurde er erst durch die Entdeckungen der CURIES im Bereich der Radioaktivität.

#### 6.3.3.1 Aufbau

Der Aufbau ist dem des Lenard-Versuchs ähnlich.  $\alpha$ -teilchen treffen auf eine dünne Goldfolie. Die Ablenkungen werden im Winkel  $\alpha$  zum ursprünglichen Strahl gemessen.

#### 6.3.3.2 Beobachtung

In Abhängigkeit vom Winkel wird die Anzahl der Lichtblitze gemessen.

Die meisten  $\alpha$ -Teilchen gehen direkt durch die Folie (ca. 100 Atomschichten dick). Aber es werden auch Teilchen abgelenkt, sogar reflektiert.

### 6.3.3.3 Erklärung

1. Streuung über  $90^\circ$  hinaus kann nur auftreten, wenn die Masse, gegen die die  $\alpha$ -Teilchen stoßen, sehr viel größer ist.  
Das bedeutet, dass die ablenkende Masse keine Elektronen sein können.
2. Je größer die ablenkende Masse ist, umso weniger Energie wird von den  $\alpha$ -Teilchen übertragen.  
Bei den gestreuten Teilchen verändert sich die Energie kaum. Praktisch die gesamte Masse des Goldatoms befindet sich (punktförmig) in der Mitte des Atoms. Damit ist das Erdbeermodell falsch.

RUTHERFORD erklärte die Vorgänge mit Hilfe von elektrischen Kräfte:

Je näher ein Teilchen der positiven Atommitte kommt, umso stärker abgelenkt, bei zentralem Stoß sogar reflektiert.

Daraus konnte der geringste Abstand eines  $\alpha$ -Teilchens von der Atommitte von  $4 \cdot 10^{-14}\text{m}$  bestimmt werden. RUTHERFORD „entdeckte“ den Atomkern.

### 6.3.3.4 Atommodell von Rutherford

1. Ca. 99,95% der Masse eines Atoms ist konzentriert auf einen Bereich von  $10^{-14}\text{m}$  Durchmesser, den Atomkern.
2. Der Kern trägt die gesamte positive Ladung.
3. Er nahm weiterhin an, dass sich die negativen Ladungen in Form von Elektronen in Kreisbahnen, deren Durchmesser mit  $10^{-10}\text{m}$  bestimmt wurde, um den Kern befänden. Die Zentralkraft kompensiere damit die Coulombkraft.

### 6.3.3.5 Der Aufbau des Kerns

Rutherford beschoss die Kernteilchen mit Stickstoff



Das positiv geladene Kernteilchen nannte Rutherford **Proton**.

1932 „entdeckt“ Chadwick das Neutron.

Jeder Atomkern besitzt  $A$  Kernteilchen (Protonen und Neutronen),  $Z$  Protonen und  $N$  Neutronen.

$Z$ : Kernladungszahl (Ordnungszahl), Elektronenzahl

$A$ : Atommasse

$N$ : Zahl der Neutronen

$$A = Z + N$$

### 6.3.3.6 Schreibweise

$$(6.3) \quad {}_{20}^{40}\text{Ca} = {}^{40}\text{Ca} = \text{Ca}40$$

Ein Element  $X$  hat  $Z$  Protonen (und Elektronen) und  $A - Z$  Neutronen:  ${}^A_Z X = X A$ .

### 6.3.3.7 Grenzen des Rutherford-Modells

1. Warum stoßen sich Protonen nicht gegenseitig ab?
2. Warum kreisen Elektronen um den Kern und stürzen nicht in den positiven Kern?
3. Das kreisende Elektron stellt einen schwingenden Dipol dar, der Energie aussenden müsste.  
Das heißt, dass die Schwingung in kürzester Zeit stoppen müsste.

Es ist davon auszugehen, dass es im makroskopischen Bereich andere physikalische Gesetze gibt als im mikroskopischen.

## 6.3.4 Bohrs Atommodell

1911 stellte Nils BOHR seine Postulate auf:

1. Die Elektronen können im Atom nur auf bestimmten, durch Quantenbedingungen definierten Bahnen, um den Kern laufen. Diese stationären Bahnen sind strahlungsfrei.  
Die erlaubten Bahnen ergeben sich aus der Bedingung, dass der Drehimpuls eines Elektrons ein ganzzahliges Vielfaches von  $h$  sein muss:  
 $2\pi r m v = n h \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$
2. Eine Änderung des Energiezustandes eines Atoms kann nur durch Übergang von einem stationären Zustand in einen anderen erfolgen. Dabei gilt für die absorbierte oder emittierte Energie  $\Delta W$   
 $\Delta W = W_2 - W_1 = h f$ .

### 6.3.4.1 Drehimpuls

Einschub s. 1.4.

### 6.3.4.2 Vermutung

alle Größen mit der Einheit Js sind gequantelt.

### 6.3.4.3 Beschreibung des H-Atoms

Die bohrschen Postulate erlauben es, ein H-Atom vollständig zu beschreiben.

Das Ziel besteht darin, die Frequenzen der H-Linien und den Durchmesser des H-Atoms rechnerisch zu bestimmen.

Die Zentralkraft der Bewegung ist die Coulombkraft:

$$\begin{aligned}
 F_Z &= F_C \\
 m_e r \omega^2 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(Ze)e}{r^2} \\
 m_e r^3 \omega^2 &= \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}
 \end{aligned}
 \tag{6.4}$$

$$\begin{aligned}
 2\pi r m v &= 2\pi m r^2 \omega = nh \Leftrightarrow \omega = \frac{nh}{2\pi m r^2} \\
 m r^3 \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m^2 r^4} &= \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}
 \end{aligned}
 \tag{6.5}$$

$$r = \frac{n^2 h^2 \epsilon_0}{Ze^2 \pi m} = \frac{h^2 \epsilon_0}{Ze^2 \pi m_e} \cdot n^2
 \tag{6.6}$$

Dabei wird (6.5) in (6.4) eingesetzt.

Die Radien hängen also nur von  $n = 1, 2, 3, \dots$  ab, da die restlichen Faktoren konstant sind. Die Elektronen bewegen sich nur auf Kreisbahnen mit bestimmten Bahnradien,  $r \sim n^2$ .

- Der Atomdurchmesser  $d \sim 2r_{n=1}$  ist etwa  $10^{-10}\text{m}$  groß, wie es bereits zuvor von RUTHERFORD vorhergesagt wurde.
- Bei  $n = 100$  ist der Bahnradius um das 10000fache größer. Solche Anregungsversuche lassen sich nur bei sehr geringem Druck durchführen, da genügend Platz vorhanden sein muss.

$n$  heißt Hauptquantenzahl.

### 6.3.4.4 Berechnung der Energiestufen

Den Bahnradien werden unterschiedliche Energiestufen zugeordnet. Allgemein gilt für die Arbeit (6.7).

$$\begin{aligned}
 W &= \int F(s) ds \\
 W &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^R \frac{Ze^2}{r^2} dr = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^R \frac{1}{r^2} dr \\
 W &= \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[ -\frac{1}{r} \right]_{\infty}^R = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R}
 \end{aligned}
 \tag{6.7}$$

$$\tag{6.8}$$

Setzt man die potentielle Energie im Unendlichen Null, so ist die potentielle Energie im Abstand  $r$  vom Kern negativ (6.8). Eine negative Energie deutet darauf hin, dass dem System Energie entzogen wird.

Das heißt, wenn ein Elektron sich in Richtung Kern bewegt, gibt es Energie ab. So entstehen Spektrallinien.

Nun wird der Radius  $r$  nach (6.6) in (6.8) eingesetzt.

$$(6.9) \quad W_{\text{pot}} = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Ze^2\pi m_e}{n^2 h^2 \epsilon_0} = -\frac{Z^2 e^4 m_e}{4\epsilon_0^2 h^2} \cdot \frac{1}{n^2} = -4,36 \cdot 10^{-18} \text{J} \cdot \frac{1}{n^2}$$

Die Gesamtenergie eines Elektrons setzt sich aus  $W = W_{\text{pot}} + W_{\text{kin}}$  zusammen.

### 6.3.4.5 Balmer-Formel

Anhand der Formel (6.9) lässt sich die Struktur der BALMER-Formel erkennen. Dann ist

$$(6.10) \quad \Delta W = -4,36 \cdot 10^{-18} \cdot \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$$

$n$  und  $m$  stellen die Bahnnummern dar.

### 6.3.4.6 Übungsaufgaben

Metzler S. 409 A. 2-4.

**Aufgabe 4:** Bestimmen Sie die Umlauffrequenz des Elektrons auf der ersten Bahn im Wasserstoffatom. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Frequenz des Photons, das für die Ionisierung eines Wasserstoffatoms im Grundzustand benötigt wird.

Zunächst werden die Coulomb- und die Gravitationskraft gleichgesetzt, daraus die Geschwindigkeit  $v$  mit  $L = mrv = \frac{nh}{2\pi}$  bestimmt und anschließend durch  $2\pi f = \omega = \frac{v}{r}$  die Frequenz bestimmt

$$(6.11) \quad \frac{m_e v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$(6.12) \quad v = \frac{e^2}{L4\pi\epsilon_0} = \frac{e^2}{2\epsilon_0 h n}$$

$$(6.13) \quad \omega = \frac{v}{r} = \frac{\frac{e^2}{2\epsilon_0 h n}}{\frac{h^2 \epsilon_0 n^2}{e^2 \pi m_e}} = \frac{\pi m_e e^4}{2\epsilon_0^2 h^3 n^3}$$

$$(6.14) \quad \omega = 2\pi f \Leftrightarrow f = \frac{m_e e^4}{4\epsilon_0^2 h^3 n^3}$$

Für  $n = 1$  ist  $f_1 = 6,58 \cdot 10^{15} \text{Hz}$ , während für ein Photon zur Ionisierung von H  $f_p = R = 3,29 \cdot 10^{15} \text{Hz} = \frac{f_1}{2}$  gilt.

### 6.3.4.7 Energieniveauschema

Dementsprechend kann ein Energieniveauschema für das H-Atom skizziert werden. Die LYMAN-Serie liegt im UV-Bereich, die BALMER-Serie liegt im sichtbaren Bereich des Spektrums und die restlichen im IR.

### 6.3.4.8 Leistungen und Nachteile des Bohrschen Atommodells

Tabelle 6.1 zeigt Leistungen und Nachteile des Modells.

Leistungen	Nachteile
1. Bruch mit klassischer Physik, freier Weg für neue Ideen	1. Das Modell versagt bei mehr als einem Außenelektron
2. Emissions- und Absorptionsspektrum sind als Energieänderung des Elektrons erklärbar	2. Scheibenförmiges Modell; alle Elektronen kreisen in einer Ebene, was einen Widerspruch zur Kugelform darstellt
3. H-Atom mathematisch genau erfassbar	3. Widerspricht HEISENBERGS Unschärferelation
4. Radius der H-Atome ist bestimmbar	4. Struktur der Spektrallinien nicht erkennbar
5. Analoge Rechnungen für Stoffe mit einem Außenelektron sind möglich	5. Widerspruch zur Wellennatur der Elektronen

Tabelle 6.1: Leistungen und Nachteile des BOHRschen Atommodells

## 6.3.5 Sommerfelds Erweiterung

### 6.3.5.1 Nebenquantenzahl

BOHR führte die Hauptquantenzahl  $n = 1, 2, 3, \dots$  ein. SOMMERFELD erweiterte das Modell um die Nebenquantenzahl, auch Drehimpulsquantenzahl  $l$  mit  $l = 0, 1, 2, \dots, n - 1$  genannt.

### 6.3.5.2 Ellipse

Eine Ellipse hat eine Hauptachse und eine Nebenachse. Die Elektronen können sich auch auf ellipsenförmigen Bahnen bewegen, so lässt sich jede Hauptquantenzahl noch in Nebenquantenzahlen unterteilen, die den Grad der Ellipsenform angeben. Ist  $l = n - 1$ , so liegt eine Kreisbahn vor. Je ellipsenförmiger, umso größer ist auch die Energie.

### 6.3.5.3 Periodensystem

Aus Spektroskopieversuchen ist bekannt (Tabelle 6.2)

## 6 Atome - Hülle und Kern

l	Kürzel	ausgeschrieben
0	s	sharp
1	p	principal
2	d	diffus
3	f	fundamental

Tabelle 6.2: Unterteilung der Schalen

### 6.3.5.4 Magnetquantenzahl $m$

Noch besteht das Problem, das Atom von der bisherigen Scheibenvorstellung mehr in eine räumliche Darstellung zu bewegen.

Der Drehimpuls  $L$  eines Elektrons ist gequantelt.  $L$  ist eine Vektorgröße, die senkrecht auf der Elektronenbahn steht ( $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$ ).

Beeinflusst man durch ein äußeres Magnetfeld die Bahnebene der Elektronen, so ergeben sich je nach Winkel zwischen  $\vec{L}$  und  $\vec{B}$  verschiedene Linienfrequenzen.

Für  $m$  gilt die Bedingung  $-l \leq m \leq l$ . Anschaulich betrachtet wird dieselbe Ellipsenbahn im Raum gedreht, wodurch sich leichte Veränderungen der Linienfrequenzen ergeben.

Die räumliche Struktur eines Atoms ergibt sich aus der Lage der Elektronenbahnen in Bezug auf ein äußeres Magnetfeld. Für die Magnetquantenzahlen  $m$  ergibt sich die Quantenbedingung  $-l \leq m \leq l, m \in \mathbb{Z}$ .

### 6.3.5.5 Spinquantenzahl

Um den Gesamtdrehimpuls ganz exakt zu berechnen, muss jedem Elektron eine Eigendrehung zugeordnet werden.

## 6.3.6 Übersicht der Quantenzahlen

Tabelle 6.3 stellt die Quantenzahlen dar.

Quantenzahl	Bedeutung	mögliche Werte
Hauptquantenzahl $n$	Nummer der Schale (große Halbachse)	$n = 1, 2, 3, 4, 5$ ; K-, L-, M-, N-Schale
(Dreh-)Impulsquantenzahl $l$	Betrag des Bahndrehimpulses (kleine Halbachse)	$l = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$ im spdf-Zustand
Magnetquantenzahl $m$	Neigung der Bahn in Bezug auf ein äußeres Magnetfeld	$-l \leq m \leq l$
Spinquantenzahl $s$	Eigendrehimpuls des Elektrons	$s = +\frac{1}{2}, s = -\frac{1}{2}$

Tabelle 6.3: Übersicht der Quantenzahlen

$Q_z$	K	L				M								
$n$	1	2				3								
$l$	0(s)	0(s)	1(p)		0(s)	1(p)		2(d)						
$m$	0	0	-1	0	+1	0	-1	0	1	-2	-1	0	1	2
$s$	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$
mgl. Zustände	2	2	6		2	6		10						
Gesamtzahl	2	8				18								

Tabelle 6.4: Beispielrechnung

### 6.3.7 Aufbauprinzipien des Periodensystems

1. Ordnungszahl = Kernladungszahl = Elektronenzahl
2. PAULI-Prinzip  
In einem Atom stimmen nie zwei Elektronen in allen vier Quantenzahlen überein.
3. Im Grundzustand des Atoms besetzen die Elektronen die Zustände, deren zugeordnete Energie am geringsten ist.

## 6.4 Verträglichkeit mit Wellenmodell

Zuletzt fehlt noch die Welleneigenschaft der Elektronen. Nach bisherigen Erkenntnissen 5.4 können Elektronen auch mit einer DE BROGLIE-Wellenlänge beschrieben werden. Ein Elektron auf der n-ten Bahn hat demnach die Wellenlänge

$$(6.15) \quad \lambda_n = \frac{h}{p_n} = \frac{h}{m_e v_n}$$

$v_n$ : Geschwindigkeit auf der n-ten Bahn

$$(6.16) \quad v_n = \omega_n \cdot r_n = \frac{e^4 m_e \pi}{2h^3 \varepsilon_0^2 n^3} \cdot \frac{\varepsilon_0 h^2 n^2}{\pi m_e e^2} = \frac{e^2}{2h\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{n}$$

$$(6.17) \quad \lambda_n = \frac{h 2h\varepsilon_0 n}{m_e e^2} = \frac{2h^2 \varepsilon_0}{m_e e^2} \cdot n$$

$$(6.18) \quad \frac{\lambda_n}{r_n} = \frac{2\pi}{n}$$

$n\lambda_n = 2\pi r_n = U_n$ : Umfang der n-ten Kreisbahn.

Der Umfang der Bahn ist ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge der „Materiewelle Elektron“.

Auf Dauer ist die Materiewelle nur existenzfähig, wenn sie sich nicht durch Interferenz selbst auslöscht. Die Materiewelle muss sich also als „stehende Welle“ ausbilden, was nur dann möglich ist, wenn die Wellenlänge ganzzahlig im Kreisumfang enthalten ist.

## 6.5 Quantenmechanisches Atommodell

Das Wellenmodell eines Teilchens wurde 1926 von Erwin SCHRÖDINGER in das Quantenmodell eines Atoms eingebunden. Es stellt die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Elektrons im Atom eindeutig und widerspruchsfrei dar.

### 6.5.1 Modell des linearen Potentialtopfs

Das Elektron soll sich in einem langgestreckten Körper der Länge  $a$  befinden. Es sollen keine Kräfte auf das Elektron wirken. Seine potentielle Energie ist festgelegt als  $E_{\text{pot}} = 0$ . Das Elektron soll nicht in die Wände eindringen können, dort sei die potentielle Energie unendlich groß.

Wenn man das Elektron als Welle interpretiert, dann kann es sich nur dann nicht aus dem Potentialtopf herausbewegen, wenn sich die Welle in  $x$ -Richtung nicht bewegt. Das geht nur, wenn die Welle einer stehenden Welle (Kapitel 4.2) entspricht, die in den Wänden Knoten besitzt, also

$$\frac{\lambda_1}{2} = a, \lambda_2 = a, \frac{3}{2}\lambda_3 = a, \dots \text{ oder allgemein } n \cdot \frac{\lambda_n}{2} = a \text{ mit } n = 1, 2, 3, \dots$$

### 6.5.2 Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Elektrons

Die stehende Welle lässt sich durch eine Sinusfunktion  $\Psi(x)$  darstellen, die allerdings auch negative Werte annehmen kann. Wahrscheinlichkeiten sind aber immer im Bereich  $[0;1]$ . Daher nimmt man als Maßstab für die Wahrscheinlichkeit, das Elektron an der Stelle  $x$  anzutreffen, das Quadrat von  $\Psi(x)$ , also  $\Psi^2(x)$ .

$\Psi_n(x)$ : Wellenfunktion für den  $n$ -ten Zustand

$\Psi_n^2(x)$ : Wahrscheinlichkeitsfunktion

### 6.5.3 Energiewertberechnung

Das Modell erlaubt die Berechnung von Energiewerten, diese hängen quadratisch von  $a$  ab (6.21). Mit  $E_{\text{pot}} = 0$  und  $\lambda = \frac{h}{p}$  ist

$$(6.19) \quad E_{\text{kin}} = \frac{m}{2}v^2 = \frac{p^2}{2m}$$

$$(6.20) \quad \lambda = \frac{2a}{n} \wedge \lambda = \frac{h}{p}$$

$$\frac{2a}{n} = \frac{h}{p} \Leftrightarrow p = \frac{h \cdot n}{2a}$$

$$(6.21) \quad E_{\text{kin}} = \frac{h^2 n^2}{4a^2 \cdot 2m} = \frac{h^2}{8a^2 m} \cdot n^2$$

### 6.5.4 Zusammenfassung

Ein auf der Länge  $a$  eingeschlossenes Teilchen der Masse  $m$  hat die Energiestufen  $E_n = \frac{h^2}{8a^2m} \cdot n^2$  mit  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Die Quantelung ergibt sich aus der Welleneigenschaft der Teilchen und der Existenz stehender Wellen.

Im linearen Potentialtopf werden die Energiebeträge  $\Delta E = E_m - E_n = \frac{h^2}{8a^2m} (m^2 - n^2)$  aufgenommen. So lässt sich auch der Abstand  $a$  der Elektronenbahnen im Atom berechnen.

## 6.6 Lumineszenz

### 6.6.1 Fluoreszenz

Das Licht einer Quecksilberlampe trifft auf einen UV-Filter und anschließend auf einen Uranglas-Würfel. Das unsichtbare UV-Licht bringt den Würfel zum Leuchten (gelbgrün). Das Elektron gelangt nach dem BOHRschen Atommodell erst auf ein höheres Niveau B.

Die eingestrahlte Lichtfrequenz ist größer als die emittierte Frequenz, also springt es nicht sofort in den Grundzustand zurück sondern in einen Zustand A. Es verweilt weniger als  $10^{-8}$ s im Zustand B.

### 6.6.2 Phosphoreszenz

Das Licht einer Hg-Lampe trifft auf ein Ziffernblatt, das nach Abschalten der Lampe leuchtet.

Nach Erreichen des Niveaus B (die Verweildauer dort entspricht der vorigen) springt das Elektron in einen metastabilen Zustand C, auf dem es sich  $10^{-3}$ s bis mehrere Minuten aufhalten kann.

Weitere Anwendung: Laser.

## 6.7 Radioaktivität

### 6.7.1 Historischer Hintergrund

Henri BECQUEREL (1852-1908) entdeckt 1896, dass die Strahlung von Uransalzen schwarzes Papier und schwarze Photoplatten durchdringt.

Marie und Pierre CURIE entdecken Radium und Polonium und untersuchen radioaktive Stoffe systematisch.

Radioaktivität: Bei der Umwandlung von Atomkernen wird energiereiche Strahlung ausgesandt.

## 6.7.2 Nachweis radioaktiver Strahlung

### 6.7.2.1 Mit Hilfe eines Elektroskops

Einem positiv oder negativ geladenen Elektroskop wird ein radioaktives Präparat genähert. Die Anzeige geht daraufhin zurück.

Radioaktive Strahlung hat ionisierende Wirkung, die Ra-Strahlung ionisiert Luftmoleküle. Elektronen können von den Gasmolekülen abgespalten werden ( $\rightarrow$  pos. Ionen) oder sie lagern sich an Gasmolekülen an ( $\rightarrow$  neg. Ionen).

Die positiven und negativen Ladungen auf dem Metallteller werden durch Gasionen neutralisiert.

### 6.7.2.2 Ionisationskammer

**Durchführung:** Der Rand einer Blechdose und ein isolierter Draht, der in die Dose hineinragt, werden unter Hochspannung gesetzt. Ebenfalls befindet sich ein Strahlerstift in der Dose. Der Ionisationsstrom wird gemessen.

**Erklärung:** Das radioaktive Präparat erzeugt Ionen, die durch das angelegte Feld zu den Elektroden beschleunigt werden. Wenn die Spannung noch relativ gering ist, kommt es zu vielen Rekombinationen (Elektron und Kation oder Anion und Kation), sodass nur wenige Ladungen die Elektroden erreichen. Somit ist eine geringe Stromstärke messbar. Wird die Spannung erhöht, so steigt die kinetische Energie der Ladungen und es finden weniger Rekombinationen statt. Somit gelangen mehr Ladungen zu den Elektroden und die Stromstärke steigt.

Die Stromstärke steigt, bis alle Ionen und Elektronen die Elektrode erreichen und keine Rekombinationen mehr stattfinden. Die Stromstärke bleibt dann konstant und der Sättigungsbereich ist erreicht worden.

### 6.7.2.3 Geiger-Müller-Zählrohr

**Aufbau** : Der Aufbau ist auf Abbildung 6.3 erkennbar.

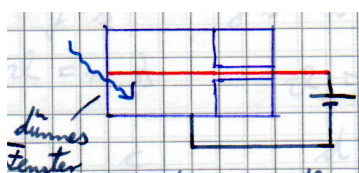


Abbildung 6.3: Aufbau des GEIGER-MÜLLER-Zählrohrs

**Erklärung** Der erste Bereich ist der Primärionisationsbereich. Hier erreichen durch Rekombination nicht alle Ionen die Elektroden. Im Sättigungs- bzw. Ionisationskammerbereich finden keine Rekombinationen mehr statt und alle Ionen erreichen die Elektroden.

Bei der Stoßionisation (Proportionalbereich) erhalten die bei der Primärionisation entstandenen Elektronen und Ionen im Raum extrem hoher Feldstärke um den Draht so große Geschwindigkeiten, dass die Energie zur Ionisation weiterer Gasatome durch Stöße ausreicht. Um zu verhindern, dass sich Elektronen an Gasatome anlagern (rekombinieren) und damit auch negative Ionen bilden, benutzt man Edelgase, die keine negativen Ionen bilden können.

Im Auslösebereich (Geiger-Müller-Bereich) ist die Stromstärke konstant. Die primär erzeugten Ionen erzeugen weitere Ladungen durch Stoßionisation und regen Atome zur Emission von Photonen an, die durch den Photoeffekt wiederum Elektronen auslösen können. So breitet sich eine an einem bestimmten Punkt des Drahtes begonnene Entladung schnell am ganzen Draht entlang aus (Beispiel für eine Entladung: Glimmlampe, vgl. Abschnitt 3.10.1.1). Im Auslösebereich sind alle Entladungen gleich, egal ob sie von einem ionisierenden Teilchen (radioaktives Präparat) oder von Photonen (Bereich: Röntgenstrahlung) ausgelöst werden.

Die Spannungsimpulse sind gleich. Ein im Auslösebereich betriebenes GEIGER-MÜLLER-Zählrohr registriert die Anzahl der einfallenden Strahlungsteilchen bzw. Quanten und nicht deren Energie. Es entspricht demnach einem Zählrohr im eigentlichen Sinne.

Der letzte Bereich bedeutet die Zerstörung des GMZ, da es zur Dauerentladung kommt.

**Zählvermögen** Elektronen und Ionen werden zu den Elektroden beschleunigt. Wegen des Massenunterschieds sind die Elektronen schneller an der Elektrode als die positiven Ionen, daher ergibt sich eine positive Raumladung vor der negativen Elektrode. Bei geringer Feldstärke kommt es zu keiner weiteren Stoßionisation, bis alle positiven Ionen entladen sind ( $\approx 10^{-4}$ s). Diese Zeit wird als Totzeit bezeichnet.

## 6.7.3 Strahlungsarten

### 6.7.3.1 Übersicht

	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
Reichweite in Luft	3-4cm	mehrere Meter	$\approx$ wie Licht
Abschirmbarkeit	1 Lage Papier	ca. 3mm Alu	mehrere cm Blei
Ionisationsfähigkeit	$10^4$ Ionen	$10^2$	1
Ablenkung durch Magnetfeld	ja, wie pos. Ladung	ja, wie neg. Ladung	nein

Abbildung 6.4: Ionisationsfähigkeit: 1 Teilchen mit 1 MeV längs 1cm

### Atomare Masseneinheit

$$1u = \frac{1}{12}m(\text{C}12) = 1,66 \cdot 10^{-27}\text{kg}.$$

**Massenspektrometer** sind ähnlich den folgenden Versuchen nach aufgebaut. Zunächst werden die Proben geladen. Hinter einem WIENfilter werden die zu untersuchenden

Objekte dann auf Kreisbahnen abgelenkt. Der Radius  $r$  ist dann ein Maß für die Masse der Probe.

**Isotope** sind Atome gleicher Kernladungszahl aber mit verschiedener Neutronenzahl (Nuklide, Kernsorten; die Anzahl der Protonen und Neutronen kennzeichnet eine Atomart).

### 6.7.3.2 Elementarer Aufbau

#### Versuch 1: Strahlungsintensität in Abhängigkeit vom Abstand

Es werden Cs137, Sr90 und Am241 verwendet. Die Versuchsergebnisse sind der Tabelle 6.5 zu entnehmen. Es ist eine Proportionalität Intensität  $\sim d^2$  erkennbar. Durch Regression erhält man eine annähernd entsprechende Formel mit dem Faktor  $x^{-1,3}$ .

Abstand $d$ [cm]	1	2	3	4	6	10
Intensität $I$ $\left[\frac{n}{\text{min}}\right]$	11160	5556	3126	2070	1260	600

Abbildung 6.5: Messwerte Abstand

$\alpha$ [°]	-45	-30	-15	0	15	30	45
I (ohne Magnetfeld) $\left[\frac{n}{s}\right]$	8,07	7,75	10,05	13,13	9,93	8,1	7,87
I (mit Magnetfeld) $\left[\frac{n}{s}\right]$	6,18	6,68	8,02	9,7	10,12	10	8,78

Abbildung 6.6: Messwerte Winkel  $\beta$

### $\beta$ -Strahlung

#### Versuch 2: Strahlungsintensität in Abhängigkeit vom Winkel

Bei einem Abstand größer als 4cm (Ausschluss der  $\alpha$ -Strahlung) wird die Intensität abhängig vom Winkel gemessen. Anschließend wird ein Magnetfeld so angelegt, dass die Lorentzkraft auf negative Teilchen nach unten wirkt, also auf den Beobachter zu. Die Intensitäten werden gemessen, etwa bei  $15^\circ$  ist ein Maximum erkennbar. In Tabelle 6.6 sind die Messwerte abzulesen.

#### Ergebnis

Die Strahlung wird durch das Magnetfeld zu den positiven Werten der Winkel abgelenkt, es muss sich um negative Teilchen handeln.

### 6.7.3.3 Identifizierung von radioaktiver Strahlung

Durch ein Magnetfeld  $\vec{B}$  werden die Elektronen eines radioaktiven Präparats auf eine Kreisbahn mit dem Radius  $r$  gezwungen. Die Lorentzkraft  $F_L$  wirkt auf die Elektronen als Zentralkraft. Mit  $\vec{v} \perp \vec{B}$  ist  $\vec{F}_L = \vec{F}_Z \Leftrightarrow |Q(\vec{v} \times \vec{B})| = m \frac{v^2}{r} \Leftrightarrow r = \frac{m}{Q} \cdot \frac{v}{B}$ . Nach einer Messung der Flussdichte kann die spezifische Ladung bestimmt werden.

$\phi$ [°]	-45	-30	-15	0	15	30	45
I [ $\frac{n}{s}$ ]	4,57			6,42	6,52	5,52	4,87

Abbildung 6.7: Messwerte Winkel  $\gamma$

**$\gamma$ -Strahlung** Die breite Kurve entsteht, weil die Elektronen bei der Emission verschiedene Geschwindigkeiten besitzen (Energien bis 3MeV).

Aus dem Graph (s. Abbildung ??, asymptotisch ist die  $\gamma$ -Strahlung erkennbar) lässt sich folgern, dass die Intensität der  $\gamma$ -Strahlung weitgehend unabhängig vom Winkel ist.

Aus Tabelle 6.7 lässt sich dies ebenso erkennen; es wird eine Aluplatte hinter dem Spalt platziert, sodass nur  $\gamma$ -Strahlung gemessen wird. Die Impulsrate ist fast konstant unabhängig vom Winkel.

#### $\alpha$ -Strahlung

Bereits bekannt ist, dass  $\alpha$ -Strahlung aus positiven Ladungen besteht und eine geringe Reichweite in Luft hat. Daher muss der Versuch im Vakuum durchgeführt werden. Magnetische Felder erzeugen Kreisbahnen mit  $r = \frac{m}{Q} \cdot \frac{v}{B}$ , dann kann bei bekannten Größen  $r, v, B$  der Quotient  $\frac{Q}{m}$  bestimmt werden. Ist  $r = 1,05\text{m}$ ,  $B = 0,27\text{T}$  und  $v = 1,5 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , dann ist  $\frac{Q}{m} = 5,29 \cdot 10^7$ . Nach einer Einheitenumrechnung ergibt sich die Einheit  $[\frac{Q}{m}] = 1 \frac{\text{C}}{\text{kg}}$ .

RUTHERFORD und GEIGER ermittelten  $(\frac{Q}{m})_\alpha = 4,8 \cdot 10^7 \frac{\text{C}}{\text{kg}}$ . Eine Ladungsmessung liefert  $Q_\alpha = 3,2 \cdot 10^{-29}\text{C}$ , sodass dann  $m_\alpha = 6,64 \cdot 10^{-27}\text{kg}$  ist. Dies entspricht der Masse eines Heliumatoms.

## 6.7.4 Zerfallsgesetze

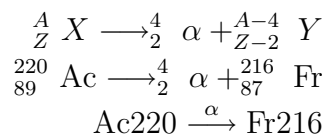
### 6.7.4.1 Zerfallsreihen

Radioaktive Strahlung beruht auf Vorgängen im Kern des Atoms.

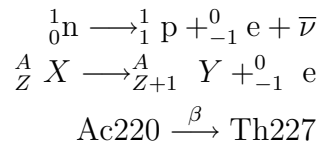
$Z$ : Anzahl der Protonen (entspricht der Zahl der Elektronen)

$A$ : Anzahl der gesamten Kernteilchen (Neutronen und Protonen)

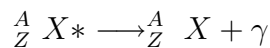
Elementsymbol  ${}^A_Z X$ . Da  $Z$  und  $X$  redundant sind, kann verkürzt  $XA$  geschrieben werden. **Isotope** sind Atome gleicher Kernladungszahl  $Z$ , die aber verschiedene Zahlen von Neutronen haben. Die Neutronenzahl errechnet sich aus  $A - Z$ .  $Z$  ergibt sich daher aus dem Element  $X$ .

**$\alpha$ -Zerfall**

**$\beta$ -Zerfall** Elektronenstrahlung aus dem Kern



$\nu$ : Antineutrino, Energie

 **$\gamma$ -Zerfall**

Das Gammaquant stellt in dem Fall Energie dar,  $\frac{A}{Z} X^*$  ist energiereicher.

**6.7.4.2 Halbwertszeit**

Die Halbwertszeit ist eine charakteristische Größe für ein radioaktives Nuklid und wird mit  $T_H$  bezeichnet. Nach der Zeit  $T_H$  ist nur noch die Hälfte der ursprünglich vorhandenen Masse nicht zerfallen.

Beispiel: Ein Stoff habe eine Halbwertszeit von 8ms und eine Ausgangsmenge  $N(0) = 100\text{mg}$ . Dann ist  $N(8) = 50\text{mg}$  und  $N(16) = 25\text{mg}$ . Mit  $N(t)$  wird die Menge des Stoffes zur Zeit  $t$  bezeichnet. Dann ist

$$(6.22) \quad N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_H}}$$

Umformungen mit  $e^{\ln \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$  und  $\ln \frac{1}{2} = -\ln 2$  ergeben

$$(6.23) \quad \begin{aligned} N(t) &= N_0 \cdot e^{(\ln \frac{1}{2}) \frac{t}{T_H}} = N_0 \cdot e^{-\ln 2 \frac{t}{T_H}} = N_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_H} t} \\ N(t) &= N_0 e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

$\lambda = \frac{\ln 2}{T_H}$  ist die Zerfallskonstante.

**6.7.5 Energiebetrachtungen im Kern**

Die starke Wechselwirkung hält Protonen im Kern zusammen. Sie hat eine extrem kurze Reichweite von ca. dem Durchmesser eines Protons ( $10^{-15}\text{m}$ ).

### Versuchsreihe

Präzise Massenmessungen ergeben

$$m_p = 1,00726764704 \text{ u} \quad m_n = 1,008664904 \text{ u} \quad m_e = 0,000548580 \text{ u}$$

Die experimentelle Gesamtmasse eines Heliumkerns ist dann  $2m_p + 2m_n = 4,031882 \text{ u}$ .

### Zusammenbau eines Heliumkerns

Aus dem Tafelwerk wird der Wert der Gesamtmasse des Atoms von  $m_{\text{He}} = 4,002604 \text{ u}$  entnommen. Dann ist die Masse des Kerns  $m_K = m_{\text{He}} - 2m_e = 4,001506 \text{ u}$ .

### Massendefekt

Zwischen den experimentellen Werten und denen aus dem Tafelwerk besteht eine Differenz von

$$\Delta m = 2m_p + 2m_n - m_K = 0,030376 \text{ u.}$$

Diese Differenz  $m(Z \text{ Protonen und } N \text{ Neutronen}) - m(\text{Kern})$  mit  $m(\text{Kern}) = m(\text{Atom}) - m(Ze^-)$  wird als Massendefekt bezeichnet.

### Energieberechnung

Nach der EINSTEINSchen Energieformel  $E = mc^2$  sind Masse und Energie äquivalent. Das heißt beim Zusammenfügen von zwei Protonen und zwei Neutronen „entsteht“ Energie.

Die Bindungsenergie ist dann  $E_B = \Delta mc^2$ .

Für die Masse 1u entspricht einer Energie von  $E = 1uc^2 = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot c^2 = 1,492 \cdot 10^{-10} \text{ J} = 9,315 \cdot 10^8 \text{ eV} = 931,5 \text{ MeV}$ .

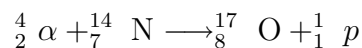
Die Bindungsenergie beim Helium ist dann  $E_B(\text{He-Kern}) = 28,295 \text{ MeV}$ .

## 6.8 Künstliche Kernumwandlungen

### 6.8.1 Geschichtlicher Hintergrund

1919 verwendete RUTHERFORD eine mit Stickstoff gefüllte Nebelkammer zur Untersuchung radioaktiver Strahlung. Aus dem Ionisationsvermögen (Spuren in der Nebelkammer) kann man auf die ionisierenden Teilchen schließen:

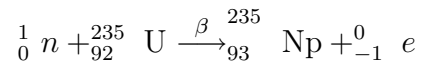
Beim Zusammenstoß des  $\alpha$ -Teilchens mit dem N-Atom muss ein Proton aus dem Kern ausgestoßen werden



BOTHE und BECKER entwickelten CHADWICKS These vom Neutron (1932) weiter



1938 beschossen Otto HAHN, Fritz STRASSMANN und Lise MEITNER ein Uranatom mit einem Neutron. Ihr Ziel war



Die Analyse der entstandenen Produkte ergab allerdings Barium (Ordnungszahl 56). MEITNER empfahl daraufhin, nach Krypton (Ordnungszahl 36) zu suchen. Krypton wurde nachgewiesen.

### 6.8.2 Kernspaltung

Zunächst ist  ${}^{235}_{92} \text{U} + {}^1_0 n \longrightarrow {}^{236}_{92} \text{U}$ , was dann jedoch weiter zerfällt. Die beiden Neutronen sind in der Lage, weitere U235-Atome zu spalten.

Kernreaktionen können kontrolliert im Atomreaktor und unkontrolliert bei einer Atombombe verlaufen.

# 7 Relativitätstheorie

## 7.1 Spezielle Relativitätstheorie

### 7.1.1 Beispiel anhand Raketen

Eine amerikanische Rakete A und eine russische Rakete R treffen sich zur Zeit  $t = 0$  mit der Relativgeschwindigkeit  $v = \frac{3}{5}c$ . Nach 20 Stunden sollen die Russen ein Funksignal an die Amerikaner senden.

Wann kommt das Signal bei den Amerikanern an?

1. Überlegung Die Amerikaner sehen ihr Raumschiff als ruhend an. In 20h hat das Raumschiff R die Strecke  $x = \frac{3}{5}c \cdot 20\text{h}$  zurückgelegt. Für die Strecke  $x$  braucht das Signal  $t = \frac{x}{c} = \frac{3}{5} \cdot 20\text{h} = 12\text{h}$ .  
Das Signal kommt nach  $20\text{h} + 12\text{h} = 32\text{h}$  bei A an.
2. Überlegung Die Amerikaner sehen das russische Raumschiff als ruhend an. Das Signal kommt nach  $T$  Stunden an. In dieser Zeit hat sich das amerikanische Raumschiff um  $x = \frac{3}{5}c \cdot T$  vom russischen entfernt. Für diesen Weg braucht das Signal  $t_1 = \frac{3}{5}T$ .  
 $T = 20\text{h} + \frac{3}{5}T \Leftrightarrow \frac{2}{5}T = 20\text{h} \Leftrightarrow T = 50\text{h}$ .

Aber: Es kann nicht sein, dass die Ankunftszeit vom Bezugssystem abhängt.

### 7.1.2 Inertialsysteme

Inertialsysteme sind Bezugssysteme, in denen das Trägheitsprinzip gilt. Systeme, die sich mit konstanter Geschwindigkeit relativ zueinander bewegen, sind gleichberechtigte Inertialsysteme: GALILEISches Relativitätsprinzip.

Ziel der Physiker seit Newton: Finden und Nachweis des Äthers als Träger der Lichtwellen und als ruhenden Raum.

## 7.2 Michelson-Morley-Experiment

### 7.2.0.1 Beobachtungen

Die Frage ist, ob die Geschwindigkeit der Lichtquelle einen Einfluss auf die Lichtgeschwindigkeit hat. Dazu wurde das MICHELSON-MORLEY-Interferometer benutzt. Nach 4.1.5 wird das Interferometer aufgebaut. Der Abstand zwischen Spiegel 1 und Schirm

wird mit  $D$  bezeichnet. Der halbdurchlässige Spiegel wird mit  $H$  bezeichnet. Im Beispiel ist  $D = 12\text{m}$ . Wenn die Anordnung um  $90^\circ$  gedreht wird und das Licht sich im Äther fortbewegt, muss sich das Streifenbild (um 0,4 Streifen) verschieben.

Die Lichtlaufzeiten ergeben sich aus der Geschwindigkeit in Erdbewegung:  $v_{\parallel} = c + v_E$ .

Die Laufzeit für die Geschwindigkeit senkrecht zur Erdbewegung ist  $v_{\perp} = \sqrt{c^2 - v_E^2}$ .

Dann gilt für die Strecke  $\overline{\text{HSp.2}}$ :

$$t_{\parallel} = \frac{D}{c + v_E} + \frac{D}{c - v_E} = \frac{D(c - v_E) + D(c + v_E)}{c^2 - v_E^2} = \frac{2Dc}{c^2 - v_E^2} = \frac{2Dc}{c^2(1 - \frac{v_E^2}{c^2})}$$

Für die Strecke  $\overline{\text{HSp.1}}$  gilt dann

$$t_{\perp} = \frac{2D}{\sqrt{c^2 - v_E^2}} = \frac{2D}{c\sqrt{1 - \frac{v_E^2}{c^2}}}$$

Dann ist  $\frac{t_{\perp}}{t_{\parallel}} = \sqrt{1 - \frac{v_E^2}{c^2}}$ .

**Ergebnis** keine Streifenverschiebung. Es gibt keinen Äther.

### 7.2.0.2 Folgerungen

Es gibt keinen Äther, d. h. elektromagnetische Wellen benötigen keinen Träger.

## 7.3 Einsteins Postulate

1. Postulat Alle Inertialsysteme sind zur Beschreibung von Naturgesetzen gleichberechtigt: Die Naturgesetze haben in allen IS die gleiche Form.
2. Postulat In allen IS breitet sich Licht im Vakuum isotop in allen Richtungen aus und unabhängig von der momentanten Geschwindigkeit mit der Geschwindigkeit  $c = 299792\frac{\text{km}}{\text{s}} \approx 300000\frac{\text{km}}{\text{s}}$ .

### 7.3.1 Folgerungen

#### 7.3.1.1 Die (relative) Gleichzeitigkeit

- a) Ereignisse am gleichen Ort: Vergleich Ereignis  $\leftrightarrow$  Ereignis
- b) Ereignisse an verschiedenen Orten: Vergleiche Ereignis 1  $\leftrightarrow$  Uhr 1, Ereignis 2  $\leftrightarrow$  Uhr 2

Dazu müssen die beiden Uhren synchronisiert sein!

### Synchronisation von Uhren

Aus der geometrischen Mitte zweier Uhren wird ein Lichtsignal gesendet, das beim Eintreffen beide Uhren startet.

Gedankenexperiment:

Betrachte zwei Raketen (A, B und C, D), die mit  $v = \frac{c}{2}$  aneinander vorbeifliegen (Abbildung ??). Aus Sicht der unteren Rakete ist die Startreihenfolge

**1.** B **2.** C, D gleichzeitig **3.** A.

Aus Sicht der oberen Rakete ist dagegen die Reihenfolge

**1.** C **2.** A, B gleichzeitig **3.** D.

Beide Sichtweise (IS) sind gleichberechtigt  $\Rightarrow$  Es ist nicht möglich, alle vier Uhren zu synchronisieren.

### Relativität der Gleichzeitigkeit

Zwei Ereignisse, die an verschiedenen Orten stattfinden und von einem IS aus als gleichzeitig angesehen werden, finden aus Sicht einer anderen, relativ zu dem ersten IS bewegten System, zu verschiedenen Zeiten statt.

Betrachtung einer Lichtuhr der Länge  $l_0 = 30\text{cm}$ : Bei der Ankunft des Signals an einem Spiegel geht die Uhr um 1 Einheit weiter. Zeiteinheit der Uhr:  $\Delta t = \frac{0,3\text{m}}{3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 1 \cdot 10^{-9}\text{s} = 1\text{ns}$ .

#### 7.3.1.2 Zeitdilatation

Zwei Uhren A und B sind synchronisiert. Eine Uhr C wird dann mit der Geschwindigkeit  $v$  vorbeibewegt (Abbildung ??).  $v$  sei so groß, dass der Vorgang  $4\text{ns}$  dauert. Welche Zeitspanne misst C?

Da (aus Sicht der Uhren A und B) das Licht in C schräg läuft, kann es nicht viermal einen Impuls erzeugen  $\Rightarrow$  die in C gemessene Zeit ist kleiner als die von A, B gemessene Zeit. C geht langsamer, die Zeiteinheit ist im bewegten System länger als im Ruhenden.

$\Delta t$ : Zeit, die C misst: Eigenzeit

$\Delta t_R$ : Zeit, die A, B messen: Ruhezeit

Das Ruhesystem ist das IS, in dem die Uhren synchronisiert sind.

$d$ : Lichtweg von A, B aus gesehen

$a$ : Lichtweg von C aus gesehen

$b$ : Strecke, die die Uhr zurücklegt

$v$  sei zusätzlich so gewählt, dass das Licht in  $\Delta t_R = 2\text{ns}$  in C einmal nach unten läuft.

Dann ist

$$(7.1) \quad d = c \cdot \Delta t_R$$

$$(7.2) \quad a = c \cdot \Delta t$$

$$(7.3) \quad b = v \cdot \Delta t_R$$

$$d^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow (c \cdot \Delta t_R)^2 = (c \cdot \Delta t)^2 + (v \cdot \Delta t_R)^2$$

$$\Delta t_R^2 (c^2 - v^2) = c^2 \Delta t^2 \Leftrightarrow \Delta t_R^2 \left( \frac{c^2 - v^2}{c^2} \right) = \Delta t^2$$

$$(7.4) \quad \Delta t_R \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \Delta t \Rightarrow \Delta t_R > \Delta t$$

**Zeitdilatation:**

Synchronisierte Uhren in einem IS  $I_R$  messen als Dauer eines Vorgangs die Zeitspanne  $\Delta t_R$ .

Eine Uhr, die sich in diesem IS  $I_R$  mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegt, misst in ihrer Eigenzeit für denselben Vorgang eine kleinere Zeitspanne  $\Delta t$ , für die gilt:

$$\Delta t = \Delta t_R \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Weil die kleinere Zeiteinheit gedehnt erscheint, spricht man von Zeitdilatation.

**Beispiel**

Nächster Fixstern Alpha Centauri: Entfernung 4,5 Lichtjahre (La). Wie lange braucht ein Raumschiff zu Alpha Centauri, wenn es mit  $v = 0,5c$  fliegt?  $\Delta t_R = 9a$ .

Welche Zeit vergeht für den Astronauten im Raumschiff?  $\Delta t = 9 \cdot \sqrt{0,75} = 7,79$  Jahre.

**7.3.1.3 Längenkontraktion**

Die Längenkontraktion (Lorentzkontraktion) ist zu der Zeitdilatation komplementär. Dabei ist

$l$  die Eigenlänge und  $l_k$  die kontrahierte Länge in einem bewegten System  $I_k$  gemessen

Die kontrahierte Länge  $l_k$  lässt sich dann mit

$$(7.5) \quad l_k = v \Delta t = \frac{l}{\Delta t_R} \cdot \Delta t = \frac{l}{\Delta t_R} \cdot \Delta t_R \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = l \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Die Eigenlänge  $l$  im Ruhesystem eines Körpers wird in einem anderen Inertialsystem  $I_k$ , das sich in Längsrichtung des Körpers mit der Relativgeschwindigkeit  $v$  bewegt, als kontrahierte Länge  $l_k$  gemessen und es gilt  $l_k = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ .

Die Längenkontraktion findet statt, wird jedoch als Drehung des Körpers wahrgenommen.

### 7.3.1.4 Relativistische Dynamik

Wird Elektronen eine Energie von  $E = 20,5 \text{ GeV}$  zugeführt, so müssten diese eine Geschwindigkeit von  $283c$  erreichen. Diese erreichen sie aber nicht. Wo also bleibt die Energie, die scheinbar die Lichtgeschwindigkeit überschreitet, wenn sie nicht über Lichtgeschwindigkeit beschleunigt werden können?

Ein Auto der Masse  $m$  stößt mit der Geschwindigkeit  $\vec{w}$  gegen eine Mauer. Je größer  $w$  und  $m$  sind, umso größer ist die Zerstörung der Mauer. Der Impuls  $p = mw$  ist an der Zerstörung der Mauer messbar.

Betrachtung: Stoß im System I, in dem die Mauer ruht

$$m = 1000 \text{ kg}, \Delta y = 100 \text{ m}, \Delta t = 4 \text{ s}; w = \frac{\Delta y}{\Delta t} = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ und } p = m \cdot w = 25000 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

Betrachtung: Stoß im System I' (Uhren A, B), das sich mit  $v = \frac{3}{5}c$  in x-Richtung (x'-Richtung) bewegt

Da  $w \ll v$  ist, kann man  $w$  vernachlässigen. Das Auto bewegt sich mit  $-v$  bezüglich I'.

Da  $\Delta x$  senkrecht zur Bewegungsrichtung von I' steht, gibt es in y-Richtung keine Längenkontraktion  $\Rightarrow \Delta y' = \Delta y = 100 \text{ m}$ .

Die Eindringtiefe der Mauer ist in I und I' gleich! Die Impulse  $p$  und  $p'$  werden in beiden Systemen gleich gemessen:  $p = p' = 25000 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$ . Aber die Zeit, die das Auto für  $\Delta y = \Delta y' = 100 \text{ m}$  braucht ist verändert.

A, B bzw. C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub> sind synchronisiert. C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub> laufen langsamer, da sie in Bezug auf I' bewegt sind:  $\Delta t = \Delta t'_R \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Leftrightarrow \Delta t'_R = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{4 \text{ s}}{\frac{4}{5}} = 5 \text{ s}$ . Dann ist  $w' = \frac{\Delta y'}{\Delta t'_R} = \frac{100 \text{ m}}{5 \text{ s}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

Dann wiederum ist  $p' = p \Leftrightarrow m'w' = mw \Leftrightarrow m' = m \cdot \frac{w}{w'} = 1000 \text{ kg} \cdot \frac{25 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{20 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 1250 \text{ kg}$ .

#### Allgemeine Darstellung

I:  $\Delta y, \Delta t, w, m_0$

I':  $\Delta y', \Delta t', w', m$

$m_0$ : Ruhemasse des Autos gemessen bei  $v = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

$$\begin{aligned}
 \Delta y' &= \Delta y \\
 \Delta t &= \Delta t' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\
 p' &= p \\
 p' &= m \cdot \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = m_0 \frac{\Delta y}{\Delta t} \\
 m &= m_0 \cdot \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta y'}{\Delta t'}} = m_0 \frac{\Delta t'}{\Delta t} = m_0 \frac{\Delta t'}{\Delta t' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\
 (7.6) \quad m &= \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}
 \end{aligned}$$

**Zusammenfassung** Die dynamische Masse  $m$  eines Körpers in einem Inertialsystem I, in dem sich der Körper mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegt, ist größer als seine Ruhemasse  $m_0$ :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \text{ für } v \rightarrow c \text{ ist } \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \rightarrow 0. \text{ Für } v \ll c \text{ ist } \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \rightarrow 1 \text{ und damit } m = m_0.$$

### 7.3.1.5 Experimentelle Forderung/Beweis

Stoßprozess mit extrem schnellen Protonen:

$$p + p \rightarrow p + p + \pi^0 \text{ (neutrales } \pi\text{-Meson)}$$

Die zusätzliche Masse des  $\pi^0$  kann nur aus der Abnahme der kinetischen Energie der Protonen entstanden sein. Massen- und Energieerhaltungssatz scheinen nicht mehr zu gelten.

Bei relativistisch relevanten Geschwindigkeiten gilt der Satz von der Erhaltung der dynamischen Masse. Differenz von dynamischer und Ruhemasse:

$$m - m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 = m_0 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

Für  $v \ll c$ , klassische Geschwindigkeiten, kann man eine Näherung benutzen.

### Näherung

$$(7.7) \quad \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}^{-1} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$$

$$m - m_0 = m_0 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - 1 \right) = \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} m_0$$

$$m - m_0 = E_{\text{kin}} \cdot \frac{1}{c^2}$$

$$(7.8) \quad mc^2 - m_0c^2 = E_{\text{kin}}$$

Noch deutlicher ist  $mc^2 = E_{\text{kin}} + m_0c^2$ .  $mc^2$  ist die (dynamische Energie) Gesamtenergie eines Teilchens mit der Masse  $m$ .  $m_0c^2$  ist die Ruheenergie des Teilchens bei  $v = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

### 7.3.1.6 Die Äquivalenz von Masse und Energie

Die Gesamtenergie  $E$  eines Teilchens und seine dynamische Masse  $m$  sind proportional:  $E = mc^2$ . Ein ruhendes Teilchen besitzt die Energie  $E_0 = m_0c^2$ , die Gesamtenergie setzt sich aus Ruheenergie und kinetischer Energie zusammen:

$$E = E_0 + E_{\text{kin}} \cdot s$$